СОВРЕМЕННЫЕ
ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИКИ

Ю. Ю. ТРОХИМЧУК

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И УСЛОВИЯ МОНОГЕННОСТИ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Серия выпускается под общим руководством
редакционной коллегии журнала
«Успехи математических наук»

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

Ю. Ю. ТРОХИМЧУК

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И УСЛОВИЯ МОНОГЕННОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

517.2
Т 76
УДК 517·54

АННОТАЦИЯ

В книге рассматриваются вопросы, связанные со взаимоотношениями свойств непрерывности, моногенности и аналитичности функций комплексного переменного. Благодаря новому, разработанному автором методу, представляющему собой синтез идей теории внутренних отображений и теории множеств моногенности, удалось освободиться от ограничительного условия однолистности непрерывных отображений в области. В книге дается сводное развернутое изложение не только результатов автора, но и всей теории в целом.

Чтение книги требует от читателя сравнительно небольшой подготовки по теории функций комплексного переменного, но большей, чем обычно, подготовки по теории функций действительного переменного. Часть необходимых сведений приведена автором в специальном приложении, с которым рекомендуется ознакомиться сразу же при чтении книги.

Юрий Юрьевич Трохимчук

Непрерывные отображения и условия моногенности

М., Физматгиз, 1963, 212 стр. с илл.

(Серия «Современные проблемы математики»)

Редактор *В. Г. Кисунько*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректор *С. Н. Емельянова*

Сдано в набор 15/VII 1963 г. Подписано к печати 9/X 1963 г. Бумага $84\times108^{1}/_{32}$.
Физ. печ. л. 6,625. Условн. печ. л. 10,87. Уч.-изд. л. 10,58. Тираж 5000 экз. Т-13906.
Цена книги 73 коп. Заказ № 1563.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им Евг. Соколовой УЦБ и ПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Классические вопросы теории аналитических функций, направленные на выяснение взаимоотношений между свойствами непрерывности, моногенности и аналитичности функций комплексного переменного неизменно привлекают внимание многочисленных математиков. Интерес к такого рода вопросам заметно усилился за последнее время, особенно в связи с построением теории квазиконформных отображений и обобщенных аналитических функций.

Пусть $w = u + iv = f(z)$ — непрерывная функция в области $\mathfrak{D}$. Известно, что если функции u, v дифференцируемы в $\mathfrak{D}$ и удовлетворяют уравнениям Коши — Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, то $f(z)$ — аналитическая функция в $\mathfrak{D}$. Естественно возникает вопрос об ослаблении указанных ограничений на функцию $f(z)$, обеспечивающих ее аналитичность. Наиболее значительные, ставшие уже классическими, результаты здесь были получены в 20—30-х годах текущего столетия Д. Е. Меньшовым. Им были введены и исследованы различные свойства, представляющие ослабление требований сохранения углов, постоянства растяжения, отображения бесконечно малых кругов в бесконечно малые круги и др., выполнение которых обеспечивает аналитичность рассматриваемых функций. В исследованиях Д. Е. Меньшова, а также во многих работах других математиков по этим вопросам существенно предположение об однолистности рассматриваемых непрерывных отображений $f(z)$ области $\mathfrak{D}$ (отображение $f(z)$ области $\mathfrak{D}$ называется *однолистным*, если различные точки области отображаются в различные точки).

Были приложены большие усилия, чтобы освободиться от указанного весьма сильного ограничения, но долгое время безуспешно. Заслуга полного решения этой задачи принадлежит Ю. Ю. Трохимчуку, автору настоящей книги, представляющей в основном переработку его докторской диссертации «Непрерывные отображения и аналитические функции» (1960 г.). Решение задачи стало возможным благодаря новому, разработанному Ю. Ю. Трохимчуком методу исследования, представляющему синтез идей теории внутренних отображений и теории множеств моногенности. В книге Ю. Ю. Трохимчука дается сводное развернутое изложение не только результатов автора книги, но и всей теории в целом.

Чтение книги требует от читателя сравнительно небольшой подготовки по теории функций комплексного переменного, но большей, чем обычно, подготовки по теории функций действительного переменного (постоянно приходится иметь дело с множествами первой и второй категорий, с теоремами Витали и Фубини, абсолютно непрерывными функциями, N-свойством и т. д.). Часть необходимых сведений по этим вопросам приведена автором в специальном приложении, с которым рекомендуется внимательно ознакомиться сразу же при чтении книги.

Хотя книга Ю. Ю. Трохимчука по характеру своего изложения представляет собой законченное целое, она, тем не менее, приводит к постановке ряда новых задач или к новому подходу к решению ряда задач современной теории функций. Это, во-первых, приложение к теории квазиконформных отображений и обобщенных аналитических функций (прежде всего к проблеме «устранимости», т. е. к характеристике ограничений на множество $\mathfrak{E}$ и поведение функций указанных классов вблизи $\mathfrak{E}$, при которых эти функции принадлежат к своему классу и на $\mathfrak{E}$), во-вторых, обобщение указанной теории на случай аналитических функций многих комплексных переменных (обобщение теории множеств моногенности, построение теории внутренних отображений, изучение особых поверхностей комплексных аналитических многообразий, приложение к теории дифференцируемых многообразий и т. д.). Нам представляется, что книга Ю. Ю. Трохимчука послужит толчком и отправным пунктом для многих дальнейших исследований по теории функций.

Л. И. Волковыский

ВВЕДЕНИЕ

Классическая теорема Коши — Гурса гласит, что *непрерывная в области $\mathfrak{D}$ функция комплексного переменного $f(z)$, моногенная всюду в $\mathfrak{D}$, аналитична внутри этой области.*

В терминах действительного переменного эта теорема формулируется следующим образом: *непрерывная функция $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ является аналитической, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в области $\mathfrak{D}$ и всюду в $\mathfrak{D}$ выполняются условия Коши — Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Коши (1831 г.) доказал эту теорему фактически в предположении непрерывности производной $f'(z)$, Гурса [1] (1900 г.) показал, что это предположение излишне[1].

Результат Гурса явился первым[2] существенным усилением основной теоремы в теории аналитических функций. Неоспоримые достоинства этого результата, а также простота и изящество метода явились прекрасным образцом для подражания и вызвали к жизни целую серию работ, посвященных самым различным вопросам анализа (см., например, [3]—[11]), появились другие обобщения теоремы Коши, возникли новые теоремы в теории полного дифференциала и связанного с ним криволинейного интеграла и т. п. В качестве примера приведем одно из указанных обобщений, принадлежащее Хеффтеру [11].

---

[1] Между прочим, наиболее простое доказательство теоремы в предположении непрерывности производной дано также Гурса [2].

[2] Некоторое обобщение было получено также Миттаг-Леффлером: Gött. Nachrichte, 1874. См. также C. R. Acad. Sci., 174, p. 1143.

Для того чтобы непрерывная в области $\mathfrak{D}$ *функция* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *была аналитической в* $\mathfrak{D}$, *необходимо и достаточно, чтобы в каждом прямоугольнике* $R[a, b; c, d] \subset \mathfrak{D}$ *со сторонами, параллельными осям координат, существовали точки* (ξ, η) *и* (ξ', η'), *для которых выполняются равенства*

$$\frac{u(b, \eta) - u(a, \eta)}{b - a} = \frac{v(\xi, d) - v(\xi, c)}{d - c},$$

$$\frac{u(\xi', d) - u(\xi', c)}{d - c} = - \frac{v(b, \eta') - v(a, \eta')}{b - a}.$$

Интересно, что существование производных здесь никоим образом не предполагается. Читатель, конечно, обратит внимание на то, что написанные равенства внешне очень напоминают условия Коши — Римана $\cdot$ (1).

И все же, несмотря на некоторое оживление в развитии теории функций, вызванное методом Гурса, существенно продвинуть эту теорию — и, в частности, обобщить теорему Коши — суждено было совершенно новому, родившемуся уже тогда, методу — методу теории множеств и метрической теории функций. Этот метод настолько изменил лицо теории функций, что совершенно естественно считать начало XX века моментом завершения классического (со времен Коши) периода ее развития, сменившегося новым периодом, гораздо более богатым и бурным. Это особенно ярко подтверждается в настоящее время, когда самые, казалось бы, различные области математики взаимно проникают друг в друга и становится затруднительным обычное деление математики на анализ, теорию функций, алгебру, геометрию и т. д. Теория функций, например, в значительной мере ощущает влияние функционального анализа, алгебры, топологии, теории дифференциальных уравнений в частных производных. Возникновение обширной теории так называемых обобщенных аналитических функций [53] связано именно с этим влиянием.

Основой подобной перестройки всех областей математики и явился в свое время новый метод в лице теории множеств и ее ближайших приложений.

Сила нового метода, с одной стороны, и самая возможность обобщения классических теорем теории функций, открытая Гурса, — с другой, стимулировали попытки ученых к дальнейшим обобщениям. В течение первых десятилетий XX века развитие теории функций комплексного переменного как раз и характеризуется появлением многочисленных усилений основной ее теоремы — теоремы Коши — Гурса. Ибо именно эта теорема наиболее полно раскрывает природу аналитических функций.

Естественно, что обобщение теоремы Коши — Гурса шло по линии замены единственного ее условия — существования производной

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

в каждой точке области $\mathfrak{D}$ — по возможности менее стеснительным требованием.

Одно из первых таких обобщений было дано Помпейю [12], показавшим, что достаточно предположить существование производной $f'(z)$ лишь почти всюду, при условии, что выражение

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right|$$

ограничено в $\mathfrak{D}$. Позже Г. Луман [13] заменил условие ограниченности этого выражения условием конечности в каждой точке $\mathfrak{D}$.

Ряд исследований был начат П. Монтелем [14], который дал следующее обобщение теоремы Коши:

Если непрерывная функция $f(z) = u + iv$ *такова, что первые частные производные функций* u и v *ограничены и всюду в области* $\mathfrak{D}$ *выполнены условия Коши — Римана* (1), *то* $f(z)$ *аналитична в* $\mathfrak{D}$[1]).

Валле-Пуссен [17] заменил здесь условие ограниченности частных производных их конечностью и суммируемостью. При этом выполнение условий (1) требуется лишь почти всюду.

Наконец, Г. Луману [18] и Д. Меньшову [19] удалось освободиться от лишних требований и доказать следующий результат (см., например, [20]):

Пусть функции $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$, *непрерывные в области* $\mathfrak{D}$, *дифференцируемы по* x *и по* y *в каждой*

---

[1]) Сюда же примыкает результат Лихтенштейна [16].

точке $\mathfrak{D}$, за исключением самое большее точек счетного множества и

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

почти всюду внутри $\mathfrak{D}$. Тогда комплексная функция $f(z)=u+iv$ является аналитической в $\mathfrak{D}$.

Еще в 1913 г. Монтель высказал эту теорему без доказательства, причем функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ он предполагал дифференцируемыми по x и по y всюду в $\mathfrak{D}$, но требовал только их ограниченности (для неограниченных функций эта теорема неверна, что показывает данный им же пример функции $f(z)=e^{-\frac{1}{z^4}}$, $f(0)=0\Big)$. Его предположение оправдалось — доказательство было дано Г. П. Толстовым [21]. Между прочим, Монтель вывел эту теорему из другого своего предположения, которое все же оказалось неверным [21].

Моногенность функции $f(z)=u+iv$ в некоторой точке $z\in\mathfrak{D}$ равносильна существованию полного дифференциала у функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ и одновременно выполнению условий Коши — Римана (1); теорема Лумана — Меньшова показывает, что теорема Коши справедлива и без предварительно обусловленной дифференцируемости функций u и v. С другой стороны, очевидно, моногенность равносильна существованию одновременно пределов

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right| \quad \text{и} \quad \lim_{h\to 0}\operatorname{Arg}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

(последнее — в точках, где $f'(z)\neq 0$), т. е. равносильна совокупности двух свойств:

1) постоянство растяжений в точке z,

2) консерватизм углов (первого рода).

При обобщении теоремы Коши естественно было попытаться разъединить эти свойства и охарактеризовать аналитические функции либо только в терминах растяжений в точке, либо только в терминах сохранения углов. Эти попытки оказались удачными, и с этого момента на заданную функцию $w=f(z)$ все чаще стали смотреть с точки зрения геометрических свойств отображения, которое она осуществляет на плоскости w.

Первым результатом в этом направлении явилась следующая теорема Г. Бора [22], в основе которой лежит свойство постоянства растяжений в точке:

Если отображение $w = f(z)$ непрерывно и однолистно в области $\mathfrak{D}$ и в каждой ее точке, за исключением, возможно, не более чем счетного их множества, существует конечный предел («растяжение»)

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right|, \tag{2}$$

отличный от нуля, то либо функция $f(z)$, либо ей сопряженная $\overline{f(z)}$ является аналитической в $\mathfrak{D}$.

Приведенный Бором пример функции

$$f(z) = \begin{cases} z & \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \\ \bar{z} & \text{при } \operatorname{Im} z \leqslant 0 \end{cases}$$

показал, что для неоднолистных отображений его теорема, вообще говоря, неверна.

Г. Радемахер [23] упростил доказательство Г. Бора, одновременно устранив лишнее предположение, что предел (2) не равен нулю.

Вторым существенным результатом явилась теорема Д. Е. Меньшова [24], кладущая в основу второе характеристическое свойство — консерватизм углов:

Если отображение $w = f(z)$ непрерывно и однолистно в области $\mathfrak{D}$ и в каждой ее точке, за исключением, возможно, не более чем счетного их множества, существует предел

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{Arg} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \tag{3}$$

то функция $f(z)$ является аналитической всюду в $\mathfrak{D}$ [1].

---

[1] Отметим, что Радемахер в 1919 г. доказал эту теорему для любых непрерывных функций $f(z)$, но при сильном ограничении: он дополнительно предполагал величину

$$L_f(z) = \varlimsup_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right|$$

всюду конечной и суммируемой. Еще более слабый результат был получен в 1914 г. Ремаком [25].

Большой заслугой Д. Е. Меньшова является то, что он первый заметил возможность дальнейшего усиления этих двух результатов, причем вместо (2) и (3) ему удалось найти в некотором смысле минимальные характеристики аналитических функций. Для полной формулировки результата Д. Е. Меньшова введем вместе с ним следующие понятия:

1) Функция $f(z)$ *обладает свойством* K' (или K'') в точке $z \in \mathfrak{D}$, если из этой точки исходят три луча, расположенные на трех различных прямых, вдоль которых существует один и тот же предел

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{Arg} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

(соответственно один и тот же конечный предел

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \right| \Bigg).$$

2) Функция $f(z)$ *обладает свойством* K''' в точке $z \in \mathfrak{D}$, если из этой точки исходят два луча, расположенные на различных прямых, вдоль которых существует один и тот же конечный предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}. \tag{4}$$

Для однолистного отображения $w = f(z)$ области $\mathfrak{D}$ свойства K', K'', K''' в точке $z \in \mathfrak{D}$ геометрически выражаются следующим образом:

а) в точке z при отображении $w = f(z)$ сохраняются по величине и направлению отсчета *углы* между тремя лучами t_1, t_2, t_3, исходящими из z и принадлежащими различным прямым (K');

б) *растяжения* вдоль трех лучей t_1, t_2, t_3, выходящих из z и принадлежащих различным прямым, одинаковы (K'');

в) сохраняется по величине и направлению отсчета *угол* [1]) между двумя лучами t_1, t_2, исходящими из z и принадлежащими различным прямым, причем *растяжения* вдоль этих лучей в точке z одинаковы (K''').

---

[1]) При условии, что (4) отлично от нуля; пример: $w = r^2 e^{\frac{\varphi\,|\varphi|'}{\pi} i}$ $z = re^{i\varphi}$ $(-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

В наиболее общей формулировке теорема Меньшова может быть представлена таким образом [26]:

Пусть функция $w=f(z)$ непрерывна и однолистна в области $\mathfrak{D}$ и пусть $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ — множества тех точек области, в которых функция $f(z)$ обладает соответственно свойствами K', K'', K'''. Предположим, что функция $f(z)$ осуществляет прямое отображение области $\mathfrak{D}$ на некоторую область плоскости w и что

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2 \cup \mathfrak{E}_3 \cup \mathfrak{H},$$

где $\mathfrak{H}$ — не более чем счетное множество.

Тогда функция $f(z)$ является аналитической всюду внутри $\mathfrak{D}$.

Ограничения этой теоремы, накладываемые на функцию $f(z)$ условиями K', K'' или K''', являются минимальными в том смысле, что «незначительное» их изменение моментально нарушает возможный аналитический характер функции $f(z)$.

Например, если $f(z)$ — произвольная неаналитическая, но всюду дифференцируемая функция в области $\mathfrak{D}$, то в каждой точке $z \in \mathfrak{D}$ можно указать — и притом бесчисленным множеством способов — две прямые, проходящие через z, вдоль которых существуют одинаковые пределы:

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \right|.$$

Это означает, что в условии K'' существенным является требование, чтобы три луча располагались на различных прямых. Далее, для неаналитической и дифференцируемой функции $f(z)$ в каждой точке z можно указать три луча, вдоль двух из которых растяжения одинаковы, но отличны от растяжения вдоль третьего, и т. д.

Отметим еще, что для всех трех свойств K', K'', K''' существенной является возможность приближения к соответствующей точке области вдоль сплошных лучей и заменить ее возможностью приближения вдоль последовательностей точек на этих лучах в общем случае нельзя (см. ниже, главу 2).

В связи с приложением к теории квазиконформных отображений Д. Е. Меньшовым [27] было получено еще одно обобщение приведенной выше теоремы Г. Бора. Чтобы его сформулировать, введем следующее понятие:

Пусть непрерывная и однолистная функция $f(z)$ определена в области $\mathfrak{D}$. Возьмем окружность $C(z_0, r)$: $|z-z_0|=r$ радиуса r с центром в некоторой точке $z_0 \in \mathfrak{D}$ и рассмотрим величину

$$H(z_0, r) = \max_{z', z'' \in C(z_0, r)} \left| \frac{f(z')-f(z_0)}{f(z'')-f(z_0)} \right|.$$

Если $H(z_0, r) \to 1$ при $r \to 0$, то скажем, что функция $w=f(z)$ *отображает бесконечно малый круг плоскости* z *на бесконечно малый круг плоскости* w.

Теорема Меньшова формулируется следующим образом:

Если непрерывная и однолистная в области $\mathfrak{D}$ *функция* $f(z)$ *для каждой точки* $z \in \mathfrak{D}$, *исключая не более чем счетное их множество, отображает бесконечно малый круг с центром в этой точке в бесконечно малый круг, то либо* $f(z)$, *либо* $\overline{f(z)}$ *является аналитической функцией в* $\mathfrak{D}$.

Одна аналогичная теорема была получена Н. С. Штейнберг [28].

Во всех перечисленных нами результатах существенную услугу при их доказательстве оказывало предположение однолистности отображения $w=f(z)$. Ясно было, что если указанные результаты верны без этого предположения, то необходим был несколько иной к ним подход.

До недавнего времени для произвольных непрерывных функций были известны следующие две теоремы, также принадлежащие Д. Е. Меньшову [29], [30]:

1. *Если функция* $f(z)$ *непрерывна в области* $\mathfrak{D}$ *и асимптотически моногенна в каждой ее точке, за исключением, возможно, не более чем счетного их множества, то* $f(z)$ *является аналитической функцией в* $\mathfrak{D}$.

2. *Пусть функция* $f(z)$ *непрерывна в области* $\mathfrak{D}$ *и пусть через каждую точку* z *этой области, исключая не более чем счетное их множество, проходят две различные прямые, вдоль которых существует один и тот же конечный предел*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

Тогда функция $f(z)$ *аналитична в* $\mathfrak{D}$ [1]).

---

[1]) Это — естественное обобщение теоремы Лумана — Меньшова.

Некоторые обобщения теорем Д. Е. Меньшова были сформулированы японским математиком Курамоти [31], но доказательства его неточны, к тому же он наперед накладывает ограничение на функцию $f(z)$ — так называемое условие S, которое обеспечивает ему прямое перенесение метода Меньшова на рассматриваемые им случаи. Но теоремы, сформулированные им, оказались верными — они являются частными случаями теорем, приводимых в книге.

Одним из основных понятий теории множеств, с которым мы сталкиваемся при изучении аналитических функций и которое позволило получить подавляющее большинство обобщений теоремы Коши, является *категория*. Тем более удивительным является поэтому следующий результат А. Безиковича [32], [20]:

Непрерывная в области $\mathfrak{D}$ *функция* $f(z)$ *аналитична в* $\mathfrak{D}$, *если она моногенна почти всюду в* $\mathfrak{D}$ *и если, кроме того,*

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \right| < \infty$$

в каждой точке $z \in \mathfrak{D}$, *исключая, быть может, множество, являющееся суммой последовательности множеств конечной длины.*

Метод доказательства этой теоремы основан на понятии производных относительно последовательности сетей [20]. Метод же категорий, обычно применяемый в подобных случаях, в прямом виде здесь непригоден, так как исключительное множество, о котором идет речь в теореме, может оказаться множеством второй категории (см. ниже, приложение).

Тем самым результат А. Безиковича указывает на более сложную природу аналитических функций, чем это могло бы показаться на первый взгляд. Весьма интересно было бы установить теорему, которая включала бы два результата: Безиковича и Лумана — Меньшова.

Заметим, наконец, что новые критерии аналитичности непрерывных функций можно получать, идя по пути обобщения теоремы Морера. В этом направлении уже получены весьма общие результаты (см., например, [33], [34], [35]).

Предметом настоящей книги являются различные обобщения теорем Г. Бора и Д. Е. Меньшова[1]) и, в конечном итоге, обобщения теоремы Коши — Гурса; при этом будут даны некоторые общие методы их получения.

Укажем вкратце план и содержание работы.

В первой главе изучаются множества моногенности произвольных непрерывных функций $f(z)$, введенные в науку еще Н. Н. Лузиным [36]. Основной результат этой главы заключается в следующем: *множество моногенности* $\mathfrak{M}_z$ *непрерывной в области* $\mathfrak{D}$ *функции* $f(z)$ *почти для всех точек* $z \in \mathfrak{D}$ *является точкой, окружностью либо полной плоскостью.*

Во второй главе доказывается аналитичность однолистной в области $\mathfrak{D}$ функции $f(z)$, обладающей свойством постоянства растяжения (конечного или бесконечного), свойствами K'', K''', а также функции $w = f(z)$, переводящей бесконечно малые круги в бесконечно малые круги. Мы приводим доказательство последнего утверждения, принадлежащее Д. Е. Меньшову [27].

Цель этой главы — дать основные вспомогательные предложения, подготавливающие переход к общему случаю непрерывных функций в главе 4.

В третьей главе, посвященной изучению внутренних отображений (по Стоилову [37]), доказывается основная для всего дальнейшего теорема топологического характера. В книге наиболее часто применяется такое следствие этой теоремы:

Пусть в области $\mathfrak{D}$ *задано непрерывное отображение* $w = f(z)$, *аналитическое вне некоторого совершенного нигде не плотного множества* $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$. *Если функция* $f(z)$ *не принимает на* $\mathfrak{P}$ *равных значений, то найдется точка* $z_0 \in \mathfrak{P}$, *в некоторой окрестности которой* $f(z)$ *однолистна.*

Отметим, что теория внутренних отображений в соединении с теорией множеств моногенности непрерывных функций и составляет содержание того общего метода, который позволил перенести все результаты Д. Е. Меньшова на случай произвольных непрерывных отображений.

---

[1]) При этом одновременно возникают новые доказательства самих этих теорем.

В четвертой главе мы и рассматриваем этот общий случай. В дополнение к главе 2 здесь доказывается также аналитичность произвольной непрерывной функции, обладающей свойством K'. (Соответствующий однолистный случай не был включен в главу 2, так как оба случая доказываются одинаково.)

В этой же главе приводится доказательство одной теоремы Помпейю.

Наконец, для удобства читателя приводится *приложение*, в котором воедино собраны основные сведения, необходимые для понимания затрагиваемых нами вопросов и которые нельзя было бы считать общеизвестными.

ГЛАВА 1

МНОЖЕСТВА МОНОГЕННОСТИ

§ 1. Определение множеств моногенности

Н. Н. Лузин [36] предложил следующее построение. Для однозначной и непрерывной в области $\mathfrak{D}$ комплексной плоскости z функции $f(z)$ рассмотрим множество $\mathfrak{M}_\varepsilon$ — множество значений отношения

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

при всевозможных $\Delta z, 0<|\Delta z|\leqslant\varepsilon$, для данного $\varepsilon>0$; $\mathfrak{M}_\varepsilon$ будем рассматривать как подмножество расширенной плоскости ζ. Пересечение замыканий всех $\mathfrak{M}_\varepsilon$, соответствующих любым $\varepsilon>0$, называется *множеством моногенности* функции $f(z)$ в точке z и обозначается $\mathfrak{M}_z$:

$$\mathfrak{M}_z=\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\mathfrak{M}_\varepsilon}.$$

Например, для случая моногенной в точке z функции $f(z)$, т. е. когда существует

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z),$$

множество $\mathfrak{M}_z$ содержит единственную точку $\zeta=f'(z)$; этим отчасти оправдывается название множеств $\mathfrak{M}_z$ и в общем случае.

Основная задача в теории этих множеств, поставленная еще Н. Н. Лузиным, заключается в выяснении их структуры в общем случае, когда $f(z)$ однозначна и непрерывна в области $\mathfrak{D}$.

Решение этой задачи приводится в следующем параграфе. Сейчас же мы дадим необходимые предварительные сведения о множествах моногенности.

По аналогии с функциями действительного переменного [38] назовем комплексное число a (случай $a=\infty$ не исключен) *производным числом* функции $f(z)$ в точке z, если существует такая последовательность чисел $\{\Delta z_n\}$, $\Delta z_n \to 0$ $(n=1, 2, \ldots)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z+\Delta z_n)-f(z)}{\Delta z_n}=a.$$

Легко показать, что множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ является множеством всех производных чисел функции $f(z)$ в точке z, и только их.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. *Если функция $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ имеет полный дифференциал в некоторой точке $z=x+iy$*[1], *то множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ функции $f(z)$ является окружностью или одной точкой.*

Доказательство. Возьмем приращение $\Delta z=\Delta x+i\Delta y=|\Delta z|e^{i\alpha}$; в силу дифференцируемости функции $f(z)$ имеем (см. приложение, § 3):

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta f=f_z\Delta z+f_{\bar z}\overline{\Delta z}+o(\Delta z), \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} f_z&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\ f_{\bar z}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Разделив (1) на приращение Δz и устремив его к нулю, причем так, чтобы угол α сохранял постоянное значение, получим

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}\to f_z+f_{\bar z}e^{-2i\alpha}. \tag{3}$$

Это показывает, что значения $\lim\limits_{\alpha=\text{const}} \frac{\Delta f}{\Delta z}$ $(\Delta z\to 0)$ заполняют на плоскости ζ окружность с центром в точке f_z и

---

[1] Заметим, что $f(z)$ не предполагается непрерывной в остальных точках области.

радиусом $|f_{\bar z}|$. Теперь легко показать, что и каждое производное число функции $f(z)$ в точке z принадлежит этой окружности и, следовательно, последняя совпадает с $\mathfrak{M}_z$. Если, в частности, $f_{\bar z}=0$ (т. е. выполнены условия Коши — Римана), то $\mathfrak{M}_z$ содержит единственную точку f_z и $f(z)$ моногенна в точке z.

Теорема 1 доказана.

Укажем еще, что для функции $\overline{f(z)}=u-iv$, сопряженной $f(z)$, параметрическое представление окружности $\mathfrak{M}_z$ имеет вид

$$\zeta=\overline{f}_{\bar z}+\overline{f}_z e^{-2i\alpha}, \quad \alpha\in[0,\ 2\pi]. \tag{4}$$

В общем случае множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ может даже содержать внутренние точки; укажем простой прием построения функции $f(z)$, для которой одно из множеств $\mathfrak{M}_z$ есть даже полная плоскость ζ.

Положим $f(z)=\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная на оси x функция, которая в некоторой точке x_0 обладает всевозможными производными числами; такие функции легко построить.

Пусть $z=x_0+iy$ произвольно. Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta z}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\cos\alpha e^{-i\alpha},$$

где, как и выше, $\Delta z=|\Delta z|e^{i\alpha}$.

Если $\zeta_0=|\zeta_0|e^{-i\alpha}$ и $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}$, то в силу выбора функции $\varphi(x)$ найдется такая последовательность $\{\Delta x_n\}$, $\Delta x_n\to 0$, что

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_n}\to\frac{|\zeta_0|}{\cos\alpha}\neq\infty.$$

Взяв теперь $\Delta z_n=\Delta x_n+i\,\Delta y_n=\Delta x_n+i\,\Delta x_n\operatorname{tg}\alpha$, получим

$$\frac{\Delta f}{\Delta z_n}\to\zeta_0.$$

Итак, каждое значение ζ_0, не лежащее на мнимой оси плоскости ζ, принадлежит множеству $\mathfrak{M}_z$; из замкнутости последнего и вытекает, что $\mathfrak{M}_z$ есть полная плоскость ζ.

А. Д. Мышкис [39] построил пример непрерывной на оси x функции $\varphi(x)$, которая в каждой точке x обладает всевозможными производными числами, следовательно, по предыдущему, функция $f(z)=\varphi(x)$ в этом случае непрерывна во всей плоскости z и в каждой ее точке множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ есть полная плоскость. Отметим, наконец, что функция

$$f(z)=x+i[y-\varphi(x)]=z-i\varphi(x) \qquad (5)$$

однолистна в конечной плоскости z и обладает тем же свойством, что и функция Мышкиса $\varphi(x)$ (см. также стр. 190).

Можно показать, что множество $\mathfrak{M}_z$ может быть любым плоским континуумом [40]. Мы укажем лишь на тот частный случай, когда на плоскости $\zeta=\xi+i\eta$ задана параметрическими уравнениями непрерывная кривая K (т. е. локально-связный континуум):

$$\begin{cases} \xi=\xi(\alpha), \\ \eta=\eta(\alpha), \end{cases} \quad \alpha\in[0,\ 2\pi],$$

причем функции $\xi(\alpha)$ и $\eta(\alpha)$ — периодические с периодом 2π. В этом случае для функции

$$f(z)=re^{i\alpha}[\xi(\alpha)+i\eta(\alpha)],\quad z=re^{i\alpha}, \qquad (6)$$

множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ в точке $z=0$ в точности совпадает с континуумом K.

Но оказывается, что точки z, в которых множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ непрерывной функции $f(z)$ не является окружностью, точкой или полной плоскостью ζ, составляют лишь множество плоской меры нуль в области $\mathfrak{D}$; это мы и докажем в следующем параграфе.

§ 2. Основная теорема о множествах моногенности

Введем сначала следующее понятие.

Определение 1. Непрерывная функция $f(z)$, заданная на произвольном множестве $\mathfrak{E}$, называется *однолистной* на этом множестве, если для любых точек $z_1,\ z_2\in\mathfrak{E}$ таких, что $z_1\neq z_2$, всегда $f(z_1)\neq f(z_2)$.

Пусть в некоторой области $\mathfrak{D}$ задана произвольная непрерывная функция $f(z)$.

Рассмотрим сначала множество $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{D}$ всех точек $z\in\mathfrak{D}$, для которых множества $\mathfrak{M}_z$ производных чисел функции $f(z)$

не содержат фиксированной точки C плоскости ζ. Это означает, что для каждого $z_0 \in \mathfrak{E}$ найдется такая его ε-окрестность $U_\varepsilon(z_0)$, что при всяком $z' \in U_\varepsilon(z_0)$ и некотором $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{f(z') - f(z_0)}{z' - z_0} - C \right| \geqslant \delta \qquad (z' \neq z_0);$$

очевидно, можно считать, что $\delta = \varepsilon$. Обозначим через $\mathfrak{E}_n \subset \mathfrak{E}$ множество тех точек множества $\mathfrak{E}$, для которых $\varepsilon = \delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Очевидно, что

$$\mathfrak{E} = \bigcup_n \mathfrak{E}_n. \tag{7}$$

Покажем, что каждое множество $\mathfrak{E}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ замкнуто в $\mathfrak{D}$.

В самом деле, пусть $z_k \in \mathfrak{E}_n$ и $z_k \to z_0 \in \mathfrak{D}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Возьмем в $\frac{1}{n}$-окрестности точки z_0 произвольную точку z'; начиная с некоторого k, она попадает в $\frac{1}{n}$-окрестность любой точки z_k, а потому (для этих k)

$$\left| \frac{f(z') - f(z_k)}{z' - z_k} - C \right| \geqslant \frac{1}{n} \, (z' \neq z_k).$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $k \to \infty$, в силу непрерывности $f(z)$ получим

$$\left| \frac{f(z') - f(z_0)}{z' - z_0} - C \right| \geqslant \frac{1}{n},$$

т. е. $z_0 \in \mathfrak{E}_n$, что и требовалось показать.

Введем вспомогательную функцию

$$w(z) = f(z) - Cz;$$

очевидно, при $z \in \mathfrak{E}_n$ и $z + \Delta z \in \mathfrak{D}$, $|\Delta z| < \frac{1}{n}$ имеем

$$\left| \frac{w(z + \Delta z) - w(z)}{\Delta z} \right| = \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \geqslant \frac{1}{n}. \tag{8}$$

В $\frac{1}{2n}$-окрестности каждой точки $z \in \mathfrak{E}_n$ функция $f(z)$ однолистна на соответствующей порции множества $\mathfrak{E}_n$. В самом деле, пусть z_1, z_2 — точки этой порции; тогда

$|\Delta z| = |z_2 - z_1| < \frac{1}{n}$ и неравенство (8) дает

$$\left| \frac{w(z_1) - w(z_1)}{z_2 - z_1} \right| \geqslant \frac{1}{n} > 0.$$

Более того, это же неравенство выполняется, если $z_1 \in \mathfrak{E}_n$, а z_2 — произвольная точка указанной $\frac{1}{2n}$-окрестности (в силу определения множества $\mathfrak{E}_n$).

Итак, нами доказана

Лемма 1. *Пусть в области $\mathfrak{D}$ задана произвольная непрерывная функция $f(z)$ и пусть $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{D}$ — совокупность всех точек z, для которых множества моногенности $\mathfrak{M}_z$ не содержат фиксированного значения C. Тогда:*

1) *множество $\mathfrak{E}$ есть сумма счетного числа замкнутых в $\mathfrak{D}$ множеств $\mathfrak{E}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. является множеством типа $\mathfrak{F}_\sigma$;*

2) *на каждом множестве $\mathfrak{E}_n$ функция $w(z) = f(z) - Cz$ является локально-однолистной.*

Пусть теперь $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{D}$ — множество всех точек z, для которых $\mathfrak{M}_z$ не есть полная плоскость ζ. Запишем все рациональные точки плоскости ζ в последовательность

$$r_1, r_2, \ldots, r_m, \ldots$$

Обозначим через $\mathfrak{F}_m$ множество точек $z \in \mathfrak{D}$, для которых $\mathfrak{M}_z$ не содержит точки r_m; тогда ясно, что

$$\mathfrak{F} = \bigcup_m \mathfrak{F}_m. \qquad (9)$$

Отсюда и из леммы 1 мы получаем

Следствие. *Совокупность всех точек области $\mathfrak{D}$, для которых множества моногенности $\mathfrak{M}_z$ не являются полными плоскостями, образуют $\mathfrak{F}_\sigma$-множество, а потому точки, для которых $\mathfrak{M}_z$ являются полными плоскостями, образуют $\mathfrak{G}_\delta$-множество* [1].

Мы докажем, что функция $f(z)$ почти всюду на множестве $\mathfrak{F}$ дифференцируема. В силу (9) это достаточно доказать для каждого множества $\mathfrak{F}_m$. По теореме В. В. Степанова (см. приложение, § 3) для этого нужно показать, что

---

[1] См. приложение, § 1.

почти всюду на $\mathfrak{F}_m$

$$\overline{\lim_{\Delta z\to 0}}\left|\frac{\Delta f}{\Delta z}\right|<\infty.$$

Так как это же неравенство выполняется одновременно и для функции вида $w(z)=f(z)-Cz$, то из доказательства леммы 1 следует, наконец, что достаточно доказать такое предложение:

Лемма 2. *Пусть в замкнутом круге $\overline{\mathfrak{D}}$ определена некоторая непрерывная функция $w(z)$. Если для каждой точки z некоторого замкнутого множества $\mathfrak{E}\subseteq\overline{\mathfrak{D}}$ и $z+\Delta z\in\overline{\mathfrak{D}}$ выполняется неравенство*

$$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|\geqslant\delta>0,$$

то почти всюду на $\mathfrak{E}$ будет

$$\overline{\lim_{\Delta z\to 0}}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|<\infty.$$

Докажем сначала еще одну лемму.

Лемма 3. *Пусть однозначная функция $z=z(w)$ непрерывно отображает замкнутое множество $\mathfrak{E}_1$ на замкнутое множество $\mathfrak{E}$ плоскости z и*

$$\left|\frac{\Delta z}{\Delta w}\right|=\left|\frac{z(w+\Delta w)-z(w)}{\Delta w}\right|\leqslant k$$

при w, $w+\Delta w\in\mathfrak{E}_1$. Тогда точки из $\mathfrak{E}$, в которых производные числа функции $z(w)$ (относительно $\mathfrak{E}_1$) могут равняться нулю, отображаются в подмножество $\mathfrak{E}$ меры нуль.

Доказательство. Очевидно, утверждение леммы верно для подмножеств $\mathfrak{E}_1$ меры нуль; а так как из ее условий следует, что функция $z(w)$ почти всюду на $\mathfrak{E}_1$ имеет полный дифференциал относительно $\mathfrak{E}_1$ (приложение, § 3), то достаточно рассмотреть лишь точки плотности множества $\mathfrak{E}_1$, где такой дифференциал существует.

Как и в случае обычного дифференциала (см. § 1 настоящей главы), легко показать, что производные числа функции $z(w)=x(u, v)+iy(u, v)$ (относительно $\mathfrak{E}_1$) в такой точке $w=u+iv$ заполняют окружность $\omega=z_w+z_{\overline{w}}e^{-2i\alpha}$,

$\alpha \in [0, 2\pi]$, где

$$z_w = \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

$$z_{\overline{w}} = \frac{\partial z}{\partial \overline{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

(частные производные здесь — асимптотические).

Отсюда следует, что для того, чтобы производное число в данной точке могло равняться нулю, необходимо и достаточно, чтобы указанная окружность проходила через начало координат $\omega = 0$, т. е. чтобы $|z_w| = |z_{\overline{w}}|$. Но в этом случае

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = |z_w|^2 - |z_{\overline{w}}|^2 = 0. \tag{10}$$

Возьмем любую такую точку $w_0 = u_0 + iv_0$ и соответствующую ей в плоскости z точку $z_0 = x_0 + iy_0$. Отображение $z = z(w)$ вблизи w_0 имеет вид

$$z - z_0 = z_w(w - w_0) + z_{\overline{w}}(\overline{w} - \overline{w}_0) + \varepsilon(w)\,|w - w_0|, \tag{11}$$

где $\varepsilon(w) \to 0$ при $|w - w_0| \to 0$ $(w \in \mathfrak{E}_1,\ z \in \mathfrak{E})$.

Рассмотрим наряду с этим аффинное отображение

$$\tilde{z} - z_0 = z_w(w - w_0) + z_{\overline{w}}(\overline{w} - \overline{w}_0). \tag{12}$$

В силу (10) оно является вырожденным и образом всей плоскости w будет прямая линия L, проходящая через точку z_0[1]. Пусть $\mathfrak{E}_1^{(r)}$ — часть множества $\mathfrak{E}_1$, расположенная в круге $|w - w_0| \leqslant r$. Докажем, что функция растяжения при отображении $z = z(w)$ в точке w_0 равна нулю, т. е. что

$$\lim_{r \to 0} \frac{\operatorname{Mes} z\left(\mathfrak{E}_1^{(r)}\right)}{\operatorname{Mes} \mathfrak{E}_1^{(r)}} = 0. \tag{13}$$

Обозначим через l отрезок прямой L, соответствующий кругу $|w - w_0| \leqslant r$ при аффинном отображении (12); легко подсчитать, что длина l равна

$$\lambda = 4\,|z_w|\,r \leqslant 4k \cdot r.$$

---

[1] Либо сама эта точка, но в последнем случае рассуждение лишь упрощается.

Положим теперь

$$\varepsilon(r) = \sup_{w \in \mathfrak{E}_1^{(r)}} |\varepsilon(w)|,$$

где $\varepsilon(w)$ — функция, определенная равенством (11); в силу дифференцируемости функции $z(w)$ в точке w_0 необходимо должно быть

$$\lim_{r \to 0} \varepsilon(r) = 0. \tag{14}$$

Так как для точек $w \in \mathfrak{E}_1^{(r)}$

$$|z - \tilde{z}| = |\varepsilon(w)| \, |w - w_0| \leqslant \varepsilon(r) \, |w - w_0|,$$

то множество $z\left(\mathfrak{E}_1^{(r)}\right)$ расположено внутри прямоугольника с центром в z_0, высоты λ и ширины $2\varepsilon(r) \cdot r$, дополненного двумя полукругами того же диаметра; площадь этой фигуры

$$S = 2\lambda r \varepsilon(r) + \pi [\varepsilon(r)]^2 r^2 \leqslant [8k + \pi\varepsilon(r)] \, \varepsilon(r) \, r^2.$$

Отсюда и из соотношений (14) и $\lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\operatorname{Mes} \mathfrak{E}_1^{(r)}}{\pi r^2} = 1$ следует (13).

Пользуясь теперь теоремой Витали о покрытии множеств и ограниченностью производных чисел функции $z(w)$ на $\mathfrak{E}_1$, нетрудно показать, что образ множества точек плотности $\mathfrak{E}_1$, в которых производное число функции может равняться нулю, имеет плоскую меру нуль. Это же, как мы указывали, и завершает доказательство леммы 3.

Докажем теперь лемму 2.

Доказательство леммы 2. Из условий леммы следует, что $w(z)$ однолистна на $\mathfrak{E}$. Пусть $\overline{\mathfrak{D}}_1 = w(\overline{\mathfrak{D}})$ и $\mathfrak{E}_1 = w(\mathfrak{E}) \subset \overline{\mathfrak{D}}_1$. Очевидно, $\overline{\mathfrak{D}}_1$ — континуум и $\mathfrak{E}_1$ замкнуто, причем обратная функция $z = z(w) = x(w) + iy(w)$ однозначна на $\mathfrak{E}_1$ $(w = u + iv)$.

«Продолжим» функции $x(w)$ и $y(w)$ на весь континуум $\overline{\mathfrak{D}}_1$. Рассмотрим полный прообраз $\mathfrak{K}_w$ любой точки $w \in \overline{\mathfrak{D}}_1$ при отображении $w = w(z)$; в качестве соответствующих «значений» функций $x(w)$ и $y(w)$ примем соответственно множество абсцисс и ординат всех точек замкнутого множества $\mathfrak{K}_w$. Рассмотрим «поверхности» $W = x(w)$ и $W = y(w)$. Пусть

$w_n \to w_0$ $(n=1, 2, \ldots)$; так как топологический предел полных прообразов точек w_n — при непрерывном отображении $w = w(z)$ — входит в полный прообраз точки w_0, то указанные «поверхности» суть замкнутые множества трехмерного пространства (u, v, W).

Из условия, наложенного на функцию $w(z)$, следует, что для точек $w_1 \in \mathfrak{E}_1$ имеют место неравенства

$$\left|\frac{z(w)-z(w_1)}{w-w_1}\right| = \left|\frac{\Delta z}{\Delta w}\right| \leqslant \frac{1}{\delta} \qquad (15)$$

при любом прообразе $z(w) \in \overline{\mathfrak{D}}$ точки w. Те же неравенства справедливы, очевидно, и для компонент $x(w)$ и $y(w)$ функции $z(w)$.

Последнее означает, что контингенция «поверхностей» $W = x(w)$ и $W = y(w)$ над точками множества $\mathfrak{E}_1$ не пересекается с некоторым двуполостным конусом, т. е. эта контингенция не есть ни полное пространство, ни полупространство. Отсюда следует (см. приложение, § 3), что почти всюду на $\mathfrak{E}_1$ контингенция «поверхностей» $W = x(w)$, $W = y(w)$ есть плоскость.

В точках $w_1 \in \mathfrak{E}_1$, где это имеет место, можно естественно определить полный дифференциал «функций» $x(w)$ и $y(w)$ (относительно множества $\overline{\mathfrak{D}}_1$), например,

$$x(w) - x(w_1) = A(w_1)(u-u_1) + B(w_1)(v-v_1) + o(w-w_1)$$
$$(w_1 = u_1 + iv_1)$$

при любом выборе значения из множества $x(w)$. Аналогично для $y(w)$.

Поэтому почти во всех точках множества $\mathfrak{E}_1 \subset \overline{\mathfrak{D}}_1$ можно определить полный дифференциал функции $z(w) = x(w) + iy(w)$ (относительно $\overline{\mathfrak{D}}_1$). Ясно, что в этих точках она имеет и полный дифференциал относительно $\mathfrak{E}_1$, который, совпадая с предыдущим, равен почти всюду на $\mathfrak{E}_1$ полному асимптотическому дифференциалу однозначной (на $\mathfrak{E}_1$) функции $z(w)$.

Теперь для $w_1 \in \mathfrak{E}_1$ можно определить множество моногенности $\mathfrak{M}_{w_1}$ «функции» $z(w)$ как совокупности всех ее производных чисел в этой точке. Почти во всех точках w_1 [1], где определен дифференциал $z(w)$, множества $\mathfrak{M}_{w_1}$ суть

---

[1] Например, в точках плотности $\mathfrak{E}_1$.

окружности (теорема 1). Но почти во всех точках плотности $\mathfrak{E}_1$ множества $\mathfrak{M}_{w_1}$ производных чисел однозначной на $\mathfrak{E}_1$ функции $z(w)$, взятых относительно $\mathfrak{E}_1$, суть также окружности, и очевидно, что в таких точках

$$\mathfrak{M}_{w_1} \equiv \tilde{\mathfrak{M}}_{w_1}. \tag{16}$$

В силу (15) остальным точкам $\mathfrak{E}_1$ соответствует на $\mathfrak{E}$ подмножество меры нуль. Рассмотрим поэтому лишь точки $w_1 \in \mathfrak{E}_1$, в которых имеет место (16).

Ясно, что в точке $z_1 = z(w_1) \in \mathfrak{E}$ производные числа функции $w(z)$ будут ограничены, если окружность $\mathfrak{M}_{w_1}$, совпадающая с $\tilde{\mathfrak{M}}_{w_1}$, не проходит через начало координат. Но таким точкам по лемме 3 соответствуют почти все точки $\mathfrak{E}$, т. е. почти всюду на $\mathfrak{E}$ имеем:

$$\overline{\lim_{\Delta z \to 0}} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| < \infty.$$

Лемма 2 доказана.

Как указывалось выше, из этой леммы, а также теоремы 1, вытекает следующее основное предложение:

Теорема 2. *Если $f(z)$ — произвольная однозначная и непрерывная в области $\mathfrak{D}$ функция, то почти для всех точек $z \in \mathfrak{D}$ множества моногенности $\mathfrak{M}_z$ этой функции суть либо окружности (в частности, точки), либо полные плоскости. При этом множество всех точек z области $\mathfrak{D}$, для которых $\mathfrak{M}_z$ не есть полная плоскость, является F_σ-множеством, на котором функция $f(z)$ почти всюду имеет полный дифференциал*[1].

То, что обе указанные возможности для множеств $\mathfrak{M}_z$ могут осуществляться для подмножеств $\mathfrak{D}$ положительной меры, показывают примеры, приведенные в § 1.

Отметим, что для вещественных непрерывных функций $f(x)$, $x \in [a, b]$, имеет место утверждение, аналогичное теореме 2; именно, из известных дифференциальных соотношений Данжуа [20] следует, что множество производных чисел такой функции почти для каждого $x \in [a, b]$ содержит либо все числа (включая $\pm\infty$), либо одно-единственное.

---

[1] Недавно получен аналогичный результат и для произвольной конечной функции [54].

В связи с понятием множества моногенности интересным является вопрос об однозначном определении функции $f(z)$ (с точностью до аддитивной постоянной) совокупностью всех $\mathfrak{M}_z$, $z \in \mathfrak{D}$; ничего, кроме тривиальных результатов, здесь пока не имеется.

§ 3. Свойство конформности и множества моногенности

В этом параграфе мы рассмотрим непрерывные отображения, обладающие свойством консерватизма углов в некоторых точках, и выясним структуру множества моногенности в таких точках. Но прежде мы уточним и обобщим основные понятия, связанные с этим свойством, приведем некоторые леммы и построим различные примеры отображений.

Будем пользоваться обычным обозначением $\operatorname{Arg} w$ для аргумента комплексного числа $w \neq 0$, определяемого лишь с точностью до целого кратного 2π, т. е.

$$\operatorname{Arg} w = \arg w + 2\pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где главное значение аргумента $\arg w$ определяется неравенствами

$$-\pi < \arg w \leqslant \pi.$$

Если в плоскости w дан некоторый луч T, выходящий из точки w_0, то определим $\operatorname{Arg} T$ следующим образом:

$$\operatorname{Arg} T = \operatorname{Arg}(w - w_0),$$

где $w \in T$ — произвольная точка, отличная от w_0.

Если последовательность точек $\{w_n\}$ сходится и ее предел $w \neq 0$, то (см. [43])

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Arg} w_n = \operatorname{Arg} w.$$

Это соотношение следует понимать в том смысле, что для любого значения $\alpha = \operatorname{Arg} w$ существует последовательность значений $\alpha_n = \operatorname{Arg} w_n$, сходящихся к α. В случае, когда $w \neq 0$ не есть отрицательное число, предыдущее равенство можно заменить равенством

$$\lim_{n \to \infty} \arg w_n = \arg w.$$

Дадим теперь следующее

Определение 2. Пусть задана произвольная последовательность чисел $\{w_n\}$, $w_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Последовательность $\{\operatorname{Arg} w_n\}$ их аргументов назовем *сходящейся*, если существует такое число $w^* \neq 0$, что

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Arg} w_n = \operatorname{Arg} w^*,$$

или, что то же, обозначая луч Ow^* через T,

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Arg} w_n = \operatorname{Arg} T.$$

Заметим, что сама последовательность $\{w_n\}$ может быть и расходящейся.

Легко показать, что последовательность $\{\operatorname{Arg} w_n\}$, $w_n \neq 0$, сходится тогда и только тогда, когда в плоскости w существует луч T, выходящий из начала координат $w = 0$, такой, что при любом $\varepsilon > 0$ все точки последовательности $\{w_n\}$, начиная с некоторого $n = N(\varepsilon)$, лежат внутри угла Ω_ε раствора 2ε с вершиной $w = 0$, биссектрисой которого является луч T; при этом, очевидно,

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Arg} w_n = \operatorname{Arg} T.$$

Для произвольных чисел $w_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ из последовательности $\{\operatorname{Arg} w_n\}$ всегда можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в указанном выше смысле. Для этого, например, рассмотрим последовательность $\{\arg w_n\}$ главных значений аргументов чисел w_n; так как она ограничена ($|\arg w_n| \leqslant \pi$), то найдется подпоследовательность $\{w_{n_i}\}$, для которой

$$\lim_{i \to \infty} \arg w_{n_i} = \alpha.$$

Но $|\alpha| \leqslant \pi$, поэтому существует число w^*, для которого $\arg w^* = \alpha$ или $\alpha + 2\pi$ (если $\alpha = -\pi$). Очевидно, что тогда

$$\lim_{i \to \infty} \operatorname{Arg} w_{n_i} = \operatorname{Arg} w^*.$$

Если $\alpha \neq -\pi$, то, в частности, получим

$$\lim_{i \to \infty} \arg w_{n_i} = \arg w^*.$$

Так как сходимость аргументов для последовательности выяснена, то сходимость их по непрерывному параметру определяем обычно, т. е. пишем

$$\lim_{n\to 0} \operatorname{Arg} w(u) = \operatorname{Arg} w^*, \quad u \in [0, 1]$$

($w(u) \neq 0$ при $u > 0$), если это равенство имеет место для каждой последовательности $\{u_n\}$, $u_n \to 0$, $u_n \in [0, 1]$. Например, если $L: w = w(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, — простая дуга на плоскости w, то для существования касательной полупрямой T в начальной точке $u = 0$ необходимо и достаточно, чтобы существовал $\lim\limits_{u\to 0} \operatorname{Arg} \Delta w = \lim\limits_{u\to 0} \operatorname{Arg} [w(u) - w(0)]$. При этом

$$\lim_{u\to 0} \operatorname{Arg} \Delta w = \operatorname{Arg} T;$$

ли T не есть отрицательная полуось действительной оси плоскости w, то, в частности, будем иметь

$$\lim_{u\to 0} \arg \Delta w = \arg T.$$

Для наших целей годится более общее определение касательной, которое мы и приведем в соответствующей форме.

Рассмотрим произвольное непрерывное отображение $w = f(z)$ области $\mathfrak{D}$ плоскости z в плоскость w. Возьмем точку $z \in \mathfrak{D}$ и некоторую простую дугу l, выходящую из этой точки. Образ дуги l при нашем отображении есть некоторая непрерывная кривая $L = f(l)$, выходящая из точки $f(z)$, уравнение которой имеет вид

$$w = f(z + \Delta z), \quad z + \Delta z \in l;$$

так как l — простая дуга, то очевидно, что это уравнение можно считать параметрическим уравнением кривой L с параметром Δz.

Определение 3. Скажем, что непрерывная кривая $L: w = f(z + \Delta z)$, $z + \Delta z \in l$ (l — простая дуга с концом z) *имеет касательную полупрямую* T в точке $f(z)$ (т. е. при $\Delta z = 0$), если

а) либо при некотором $\delta > 0$ функция $f(z + \Delta z)$ постоянна на l при $|\Delta z| \leqslant \delta$; тогда лучу T приписываем любое направление;

б) либо существует

$$\lim_{\Delta z\to 0} \operatorname{Arg} \Delta w = \lim_{\Delta z\to 0} \operatorname{Arg} [f(z + \Delta z) - f(z)],$$

где Δz пробегает все значения, для которых $\Delta w \neq 0$; тогда

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \Delta w = \operatorname{Arg} T.$$

Из нашего определения сходимости аргументов вытекает, что более полное определение 3 можно высказать следующим образом: непрерывная кривая L: $w = f(z + \Delta z)$ *имеет касательную* T в точке $f(z)$, если при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что отрезок кривой L для $|\Delta z| \leqslant \delta$ расположен в некотором замкнутом[1] угле Ω_ε раствора 2ε с вершиной в точке $f(z)$ и биссектрисой T.

Отметим, что в случае, когда вблизи точки $z \in l$ функция $f(z)$ непостоянна на l, то либо касательная T для кривой L вполне определена, либо не существует; это легко следует из того, что из любой последовательности $\{\operatorname{Arg} w_n\}$, $w_n \neq 0$, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (см. выше).

Дадим теперь основное определение.

Определение 4. Непрерывное отображение $w = f(z)$ области $\mathfrak{D}$ называется *конформным* в точке $z \in \mathfrak{D}$, если образ каждой простой дуги l, выходящей из точки z и имеющей касательную t в этой точке, есть непрерывная кривая L, имеющая касательную T в точке $f(z)$ в смысле определения 3, причем касательные $\{T\}$ можно определить[2] так, что выполняется свойство: если произвольные две дуги l_1, l_2 с касательными t_1, t_2 отображаются на кривые L_1, L_2 с касательными T_1, T_2, то

$$[t_1 \widehat{,} t_2] = [T_1 \widehat{,} T_2]\,^{3)};$$

при этом будем говорить о конформном отображении первого или второго рода, смотря по тому, сохраняется ли направление отсчета указанных углов или изменяется на противоположное (ср. [43]).

Заметим, что по этому определению постоянное отображение (т. е. при $f(z) = \text{const}$) также является конформным. Будем считать его конформным отображением первого рода.

---

[1] Можно рассматривать и открытый угол Ω_ε, но с присоединенной к нему вершиной $f(z)$.

[2] В случае, если неторые из них не определены.

[3] Через $[t_1 \widehat{,} t_2]$ обозначается величина угла между лучами t_1, t_2, заключенная между 0 и π.

Очевидно, что конформность первого рода равносильна равенству

$$\operatorname{Arg} t_2 - \operatorname{Arg} t_1 = \operatorname{Arg} T_2 - \operatorname{Arg} T_1.$$

Имеет место следующая легко доказываемая лемма.

Лемма 4. *Для того чтобы непрерывное отображение* $w = f(z)$ *было конформным первого рода в некоторой точке* $z \in \mathfrak{D}$, *вблизи которой функция* $f(z)$ *непостоянна, необходимо и достаточно существование предела*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z}, \tag{17}$$

где Δz *пробегает все значения, для которых* $\Delta w \neq 0$.

При этом, если T — *луч на плоскости* ζ, *выходящий из начала* $\zeta = 0$ *и такой, что* $\operatorname{Arg} \mathrm{T}$ *равен пределу* (17), *то* $\operatorname{Arg} \mathrm{T}$ *есть угол поворота касательной к кривой* l *в точке* z *при переходе к ее образу* L: $w = f(z+\Delta z)$, $z + \Delta z \in l$, *с начальной точкой* $f(z)$.

Доказательство предоставляем читателю.

Из определения предела (17) (см. выше) следует, что для того, чтобы отображение $w = f(z)$ было конформным первого рода в точке $z \in \mathfrak{D}$, необходимо и достаточно, чтобы в плоскости ζ существовал луч T (с начальной точкой $\zeta = 0$) со следующим свойством: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что замкнутый угол Ω_ε раствора 2ε с биссектрисой T содержит все значения отношения

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

при $0 < |\Delta z| \leqslant \delta$; при этом, очевидно,

$$\operatorname{Arg} \mathrm{T} = \lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Из определения множества моногенности (§ 1) отсюда сразу следует

Лемма 5. *Если непрерывное отображение* $w = f(z)$ *области* $\mathfrak{D}$ *является конформным первого рода в точке* $z \in \mathfrak{D}$, *то множество моногенности* $\mathfrak{M}_z$ *расположено на некотором луче* T *с начальной точкой* $\zeta = 0$;

при этом

$$\operatorname{Arg} T = \lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Из этой леммы следует, что в случае конформности первого рода естественно определить величину $\operatorname{Arg} \mathfrak{M}_z$, взяв ее равной $\operatorname{Arg} T$; это, как и выше, — угол поворота кривых при отображении $w = f(z)$ в точке z. В частности, если $\mathfrak{M}_z$ содержит точки $\zeta \neq 0, \infty$, то

$$\operatorname{Arg} \mathfrak{M}_z = \operatorname{Arg} \zeta,$$

где ζ — произвольная точка $\mathfrak{M}_z$.

Заметим, что если отображение $w = f(z)$ конформно (первого рода) в точке z, то множество $\mathfrak{M}_z$ может содержать и точку $\zeta = 0$ (что, как известно, для аналитических функций невозможно), это показывают следующие примеры отображений вблизи точки $z = 0$:

$$w = z\,|z|,$$

$$w = z\left(\frac{1}{1-|z|} + \sin\frac{1}{|z|}\right).$$

Первая из приведенных функций даже моногенна в точке $z = 0$, для второй — множеством $\mathfrak{M}_0$ служит сегмент $[0, 2]$ действительной оси плоскости ζ. Можно дать пример даже однолистной функции с подобным свойством; это — функция

$$w = z\frac{f(|z|)}{|z|},$$

где $f(x) > 0$, $f(0) = 0$ — строго возрастающая функция, не имеющая производной в точке $x = 0$, нижнее производное число которой равно нулю.

Примеры отображений, конформных в точке $z = 0$, вблизи которой функции $f(z)$ принимают и равные значения, дают хотя бы функции вида

$$w = r^2\,|\sin n\varphi|\,e^{i\varphi} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

при $z = re^{i\varphi}$.

Но лемма 5 необратима, как показывает уже пример $w = z^2$ или более сложный

$$w = z\left(1 + \frac{1}{1-|z|}\sin\frac{1}{|z|} + i\,|z|\right).$$

Для последней функции множеством $\mathfrak{M}_0$ является сегмент $[0, 2]$ действительной оси, и при условии существования $\operatorname{Arg}\mathfrak{M}_0$ имело бы место соотношение $\operatorname{Arg}\mathfrak{M}_0 = 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; но для любых точек $\{z_n\}$ таких, что $|z_n| = \dfrac{1}{(4n-1)\frac{\pi}{2}}$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \arg\frac{w_n}{z_n} = \frac{3\pi}{4}.$$

Можно указать пример однолистной функции с подобным свойством:

$$w(z) = w(re^{i\varphi}) = r\left[1 - (1-r)\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{1}{r}} e^{i\,\frac{\varphi|\varphi|}{\pi}}$$

$$\text{при } -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi \qquad (r < 1).$$

В самом деле, радиусам $\varphi = \text{const}$ круга $|z| < 1$ соответствуют радиусы $\Phi = \text{const}$ круга $|w| < 1$, и это соответствие взаимно однозначно и непрерывно; далее, вдоль каждого радиуса $\varphi = \text{const}$ модуль $|w(re^{i\varphi})|$ есть строго возрастающая функция от r. Отсюда и следует однолистность $w(z)$ в круге $|z| < 1$.

Для этой функции множеством производных чисел $\mathfrak{M}_0$ является отрезок $[0; 1]$ действительной оси плоскости ζ; но конформность не имеет места, так как, например, радиусам $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ соответствуют радиусы $\Phi = 0$ и $\Phi = \frac{\pi}{4}$.

И все же частичное обращение леммы 5 можно привести.

Лемма 6. *Если для непрерывной функции $f(z)$ множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ в точке z есть конечный отрезок (или конечная точка) луча, выходящего из начала координат, не содержащий точки $\zeta = 0$, то отображение $w = f(z)$ в точке z является конформным первого рода.*

В самом деле, из условий леммы и определения множества моногенности легко следует, что условие леммы 4 выполнено.

Так как отрезок прямой есть непрерывная кривая, то по методу, указанному в главе 1 (см. (6) § 1), легко построить примеры, удовлетворяющие условиям леммы 6.

Из сказанного выше следует, что точка $\zeta = 0$ на плоскости производных чисел играет особую роль в теории множеств моногенности, по крайней мере в вопросах, связанных с конформностью. Подобной же особенностью обладает и точка $\zeta = \infty$, что легко предвидеть, так как, например, для однолистного отображения $w = f(z)$ множество $\mathfrak{M}_z$ связано с множеством $\mathfrak{M}_w$ обратной функции $z = \varphi(w)$ преобразованием $\omega = \frac{1}{\zeta}$ и, следовательно, каждое свойство точки $\zeta = 0$ для функции $f(z)$ выражается в соответствующем ему свойстве точки $\omega = \infty$ для обратной функции $\varphi(w)$.

Рассмотрим два примера:

$$w = z\sqrt{|z|},$$

$$w = -z^2 \frac{\ln|z|}{|z|}.$$

В том и другом случае $\mathfrak{M}_0$ есть бесконечно удаленная точка $\zeta = \infty$, но первое отображение конформно в точке $z = 0$, а второе — нет, так как для одного

$$\lim_{z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{w}{z} = 2\pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots),$$

а для другого этот предел не существует.

Вообще из леммы 4 следует, что если отображение $w=f(z)$ конформно в точке z и $\mathfrak{M}_z$ содержит бесконечно удаленную точку $\zeta = \infty$, то бесконечно удаленные точки, принадлежащие другим лучам плоскости ζ, мы должны при этом считать отличными от первой; то же справедливо и для точки $\zeta = 0$.

Другими словами, при изучении конформных отображений мы должны считать, что плоскость ζ имеет не одну бесконечно удаленную — и «начальную» — точку, а бесчисленное их множество, именно, рассматривать ее не как сферу, а как замкнутое круговое кольцо с граничными «окружностями» бесконечно удаленных и «начальных» точек $\zeta = 0$. Приведенные нами примеры убеждают в необходимости различать эти топологии плоскости ζ.

Но это различие имеет место пока мы рассматриваем отдельные точки $z \in \mathfrak{D}$. Более того, ниже, в главе 4, мы покажем, что если при отображении $w = f(z)$ в каждой точке $z \in \mathfrak{D}$ множество $\mathfrak{M}_z$ расположено на некотором луче T_z, но, вообще говоря, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ не существует, то отображение осуществляется аналитической функцией. Ясно, что в этих же условиях лемма 5 оказывается обратимой.

Дадим теперь следующее определение.

Определение 5. Функция $f(z)$ *обладает свойством* K' в точке $z \in \mathfrak{D}$, если из нее исходят три луча $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, расположенных на трех различных прямых, причем

а) либо при некотором $\delta > 0$ функция $f(z + \Delta z)$ постоянна при $z + \Delta z \in t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ и $|\Delta z| \leqslant \delta$,

б) либо существует определенный предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \operatorname{Arg} \mathrm{T}_z,$$

$$z + \Delta z \in t_i(z) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

где Δz пробегает лишь значения, для которых $\Delta w \neq 0$. При этом в случае а) лучу T_z приписываем произвольное направление.

Если, в частности, на лучах t_i $(i = 1, 2, 3)$ вблизи z имеем $\Delta w \neq 0$ и луч T_z не есть отрицательная полуось действительной оси плоскости ζ, то K'-свойство означает, что в обычном смысле

$$\lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \arg \mathrm{T}_z, \quad z + \Delta z \in t_i.$$

Как и в лемме 5, свойство K' по определению 5 равносильно следующему: образы лучей t_1, t_2, t_3 в плоскости w при отображении $w = f(z)$ суть непрерывные кривые L_1, L_2, L_3 с касательными (в смысле определения 3) T_1, T_2, T_3 такими, что

$$[t_1 \widehat{,} t_2] = [T_1 \widehat{,} T_2], \quad [t_1 \widehat{,} t_3] = [T_1 \widehat{,} T_3],$$

$$[t_2 \widehat{,} t_3] = [T_2 \widehat{,} T_3],$$

причем сохраняются направления отсчета углов.

Из определений предыдущего параграфа следует, что существование предела

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \operatorname{Arg} \mathrm{T}_z, \quad z + \Delta z \in t_1, t_2, t_3$$

равносильно такому свойству: *каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *найдется такое* $\delta > 0$, *что замкнутый на плоскости* ζ *угол* Ω_ε *раствора* 2ε *с биссектрисой* T_z *содержит все значения отношения*

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad z + \Delta z \in t_1,\ t_2,\ t_3,$$

при всех Δz *таких, что* $0 < |\Delta z| \leqslant \delta$.

Отсюда вытекает, что все производные числа функции $f(z)$, соответствующие приближению к точке z вдоль t_1, t_2, t_3, расположены на одном луче T_z; ниже, в § 4, мы это используем.

§ 4. Леммы о свойствах K', K'', K'''

Здесь мы с помощью теоремы 1 (§ 1) докажем некоторые утверждения о свойствах K', K'', K''' [26]. Напомним определение свойств K'', K''' (см. также введение).

Функция $f(z)$ *обладает свойством* K'' в точке z области $\mathfrak{D}$, если из этой точки исходят три луча — t_1, t_2, t_3, расположенные на трех различных прямых, вдоль каждого из которых существуют конечные пределы

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \right|, \quad z + h \in t_1,\ t_2,\ t_3, \tag{18}$$

причем все эти пределы одинаковы.

Функция $f(z)$ *обладает свойством* K''', в точке $z \in \mathfrak{D}$, если из нее исходят два луча t_1, t_2, расположенные на различных прямых, вдоль каждого из которых существует конечный предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}, \quad z + h \in t_1,\ t_2, \tag{19}$$

причем оба эти предела одинаковы.

Напомним еще один удобный термин: скажем, что однолистное отображение $w = f(z)$ области $\mathfrak{D}$ является *прямым*, если при этом отображении направление обхода каждой замкнутой жордановой кривой области $\mathfrak{D}$ сохраняется.

Докажем следующие леммы.

Лемма 7. *Если в точке z области $\mathfrak{D}$ функция $f(z)$ обладает свойством K' (или K''') и имеет полный дифференциал, то она моногенна в этой точке.*

Лемма 8. *Пусть непрерывная функция $w = f(z)$ однолистна в области $\mathfrak{D}$ и осуществляет прямое отображение $\mathfrak{D}$ на некоторую область плоскости w. Если в некоторой точке $z \in \mathfrak{D}$ функция $f(z)$ обладает свойством K'' и имеет полный дифференциал, то она моногенна в этой точке.*

Доказательство лемм 7 и 8. В силу теоремы 1 множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ функции $f(z)$ есть окружность (или точка) с параметрическим представлением

$$\zeta = f_z + f_{\bar{z}} e^{-2i\alpha}, \qquad \alpha \in [0, 2\pi], \tag{20}$$

где ζ есть производное число функции $f(z)$ в точке z, соответствующее приближению к z вдоль луча с наклоном α; при этом лучам, расположенным на различных прямых, т. е. для которых разность углов α отлична от π, соответствуют и различные производные числа $\zeta \in \mathfrak{M}_z$, если $f_{\bar{z}} \neq 0$.

Из этого замечания сразу следует, что если выполнено свойство K''', то $f_{\bar{z}} = 0$, т. е. функция $f(z)$ моногенна в точке z.

Пусть выполнено свойство K'; если бы $f_{\bar{z}} \neq 0$, то существовали бы три различных производных числа функции $f(z)$, расположенных на одном и том же луче T_z с началом в точке $\zeta = 0$ (см. § 3), т. е. этот луч должен был бы пересекать окружность $\mathfrak{M}_z$ в трех различных точках, что невозможно. Следовательно, и в этом случае $f_{\bar{z}} = 0$.

Пусть теперь для прямого однолистного отображения $w = f(z)$ выполнено свойство K'' в точке z. Если бы $f_{\bar{z}} \neq 0$, то существовали бы три различные точки окружности $\mathfrak{M}_z$, расположенные на одном и том же расстоянии от $\zeta = 0$ (равном общему значению пределов (17)), т. е. $\mathfrak{M}_z$ было бы окружностью с центром в начале координат $\zeta = 0$ и радиусом $|f_{\bar{z}}| \neq 0$; но тогда в силу (19) должно быть $f_z = 0$.

В этом случае сопряженная функция $\overline{f(z)}$ была бы моногенной в точке z и в силу (4) ее производная $\bar{f}'(z) = \bar{f}_{\bar{z}} \neq 0$; отсюда следовало бы, что в некоторой окрестности z отображение $w_1 = \overline{f(z)}$ сохраняет направление обхода замкнутых кривых[1]), содержащих внутри точку z, и, следовательно, отображение $w = f(z)$ меняет это направление на противоположное, что противоречит предположению леммы 8.

Итак, в этом случае также должно быть $f_{\bar{z}} = 0$, и функция $f(z)$ моногенна в точке z.

Леммы 7 и 8 доказаны.

Из их доказательства ясно, что для каждой дифференцируемой и нигде не моногенной функции $f(z)$ можно выбрать в каждой точке $z \in \mathfrak{D}$ два луча $t_1(z)$ и $t_2(z)$, вдоль которых растяжения (т. е. значения (17)) одинаковы, тем не менее K''' не выполняется, или выбрать три луча $t_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) такие, что вдоль $t_1(z)$ и $t_2(z)$ растяжения одинаковы, но отличны от растяжения вдоль $t_3(z)$ (невыполнение K'') и т. д.

В этом смысле свойства K', K'', K''' являются минимальными характеристиками для свойства моногенности (в частности, аналитичности) дифференцируемых функций.

Более того, мы увидим ниже, что во многих случаях выполнение какого-либо из условий K', K'', K''' в области $\mathfrak{D}$ самого по себе, т. е. без предположения дифференцируемости функции, обязательно приводит к аналитическим функциям. Следовательно, характеристики K', K'', K''' оказываются в этих случаях не только необходимыми, но и достаточными для аналитичности.

Эти вопросы мы затронем уже в следующей главе.

---

[1]) См. также доказательство леммы 26.

ГЛАВА 2

ОДНОЛИСТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В этой главе мы приведем доказательства теоремы Бора (в несколько усиленной формулировке) и некоторых теорем Меньшова для случая отображений $w=f(z)$, непрерывных и однолистных в области $\mathfrak{D}$. При этом мы установим ряд вспомогательных лемм, которые также будут существенно использованы в дальнейшем.

§ 1. Отображения с постоянным растяжением

Пусть задано некоторое непрерывное отображение $w=f(z)$ области $\mathfrak{D}$. Введем следующее понятие:

Определение 6. Скажем, что отображение $w=f(z)$ обладает в точке $z \in \mathfrak{D}$ *постоянным растяжением*, если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \right|.$$

Этот предел назовем растяжением отображения $w=f(z)$ в точке z области $\mathfrak{D}$.

Отметим, что это определение отличается от обычного тем, что в нем допускаются в бесконечные значения для растяжения.

Нашей целью является доказательство следующей теоремы, несколько обобщающей теорему Бора.

Теорема 3. *Если непрерывное и однолистное отображение $w=f(z)$ области $\mathfrak{D}$ обладает постоянным растяжением в каждой ее точке, исключая не более чем счетное их множество, то либо функция $f(z)$, либо ей сопряженная $\overline{f(z)}$ является аналитической всюду* в $\mathfrak{D}$.

При доказательстве теоремы 3 можно считать, что отображение $w=f(z)$ является прямым (§ 3 главы 1), так как в противном случае этого можно было бы достичь операцией сопряжения: $\overline{f(z)}$.

Аналитическая функция всегда осуществляет прямое соответствие между областями; поэтому теорема 3 будет доказана, если мы докажем следующее предложение.

Теорема 3'. *Если непрерывное однолистное и прямое отображение $w=f(z)$ области $\mathfrak{D}$ обладает постоянным растяжением в каждой ее точке, исключая не более чем счетное их множество, то функция $f(z)$ является аналитической всюду в $\mathfrak{D}$.*

Для доказательства приведем сначала несколько лемм.

Лемма 9. *В условиях теоремы* 3' *функция $f(z)$ моногенна почти всюду в $\mathfrak{D}$.*

Доказательство. Если в точке $z\in\mathfrak{D}$ функция $f(z)$ обладает постоянным растяжением, то очевидно, что все производные числа ее в этой точке по модулю равны; следовательно, в каждой точке $z\in\mathfrak{D}$, исключая не более чем счетное их множество, множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ не есть полная плоскость, а потому в силу теоремы 2 функция $f(z)$ почти во всех точках z области $\mathfrak{D}$ имеет полный дифференциал. В каждой такой точке z функция $f(z)$, очевидно, удовлетворяет всем условиям леммы 8 и, следовательно, моногенна в ней.

Лемма 9 доказана.

Рассмотрим снова функцию $f(z)$ теоремы 3'. Области $\mathfrak{D}$ при однолистном отображении $w=f(z)$ соответствует некоторая область $\mathfrak{D}_1$ плоскости w. Пусть $\varphi(w)$ — функция, определенная в области $\mathfrak{D}_1$ и обратная к функции $f(z)$.

Из условий теоремы 3' легко следует, что функция $\varphi(w)$ также обладает постоянным растяжением в каждой точке $w\in\mathfrak{D}_1$, исключая не более чем счетное их множество, и осуществляет прямое соответствие между областями $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1$. Поэтому из леммы 9 вытекает

Лемма 10. *В условиях теоремы* 3' *обратная функция $z=\varphi(w)$ моногенна почти всюду в соответствующей области $\mathfrak{D}_1$.*

Докажем еще одну лемму, которую для дальнейших применений сразу приведем в несколько более общей форме, чем это необходимо в настоящем параграфе.

Лемма 11. *Пусть непрерывная в области $\mathfrak{D}$ функция $f(z) = u + iv$ $(z = x + iy)$ обладает конечными частными производными по x и по y вне некоторого замкнутого множества $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$, причем существует такая постоянная n, что*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant n\,|z_2 - z_1| \tag{1}$$

для любых точек z_1, z_2 множества $\mathfrak{P}$, лежащих либо на прямой $x = \text{const}$, либо на прямой $y = \text{const}$.

Если

1) *функция $f(z)$ моногенна почти всюду в области $\mathfrak{D}$* и

2) *производная $f'(z)$ суммируема в $\mathfrak{D}$, то $f(z)$ является аналитической функцией внутри $\mathfrak{D}$.*

Доказательство. Возьмем произвольный прямоугольник $\mathfrak{R}[x_1, x_2;\ y_1\ y_2]$, расположенный внутри области $\mathfrak{D}$, со сторонами, параллельными осям координат; обозначим через C контур этого прямоугольника.

Из суммируемости производной

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

вытекает суммируемость всех частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ внутри $\mathfrak{D}$ и, в частности, на $\mathfrak{R}$.

По теореме Фубини

$$\int\limits_R\int \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx,$$

причем внутренний интеграл существует почти для всех $y \in [y_1, y_2]$. Для каждого такого y рассмотрим в прямоугольнике $\mathfrak{R}$ соответствующий отрезок $R(y)$ прямой, параллельной оси Ox. Пересечение отрезка $R(y)$ с множеством $\mathfrak{P}$ обозначим через $\mathfrak{P}(y)$.

В силу (1) для функции $u(x, y) = u(z)$ также имеем $|u(z_2) - u(z_1)| \leqslant n\,|z_2 - z_1|$ при любых z_1, $z_2 \in \mathfrak{P}(y)$. Так как производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ суммируема на отрезке $R(y)$, то $u(x, y)$ — при фиксированном y — есть абсолютно непрерывная функция от x на отрезке $[x_1, x_2]$ (см. приложение, § 4).

Поэтому почти для всех $y \in [y_1, y_2]$ имеем

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}\, dx = u(x_2, y) - u(x_1, y).$$

Отсюда

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}\, dx = \int_{y_1}^{y_2} [u(x_2, y) - u(x_1, y)]\, dy = \int_C u\, dy.$$

Вычисляя подобным образом интегралы от остальных частных производных, окончательно получим

$$-\int_R\int \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\, dy + i \int_R\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy =$$
$$= \int_C u\, dx - v\, dy + i \int_C v\, dx + u\, dy = \int_C f(z)\, dz. \qquad (2)$$

Так как функция $f(z)$ моногенна почти всюду внутри $\mathfrak{R}$, то почти всюду в $\mathfrak{R}$ выполнены условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Формула (2) дает тогда

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

Из произвольности прямоугольника $\mathfrak{R}$ и теоремы Морера отсюда и следует аналитичность функции $f(z)$ всюду внутри области $\mathfrak{D}$.

Лемма 11 доказана.

Приведем сразу же одно простое обобщение этой леммы, которое мы используем в следующем параграфе:

Лемма 11'. *Пусть непрерывная в области $\mathfrak{D}$ функция $f(z)$ для некоторой косоугольной системы координат (ξ, η) обладает конечными частными производными по ξ и по η вне замкнутого множества $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$,* *причем существует такая постоянная* n, *что*

$$|f(z_2)-f(z_1)| \leqslant n\,|z_2-z_1|$$

для любых точек z_1, z_2 *множества* $\mathfrak{P}$, *лежащих либо на прямой* $\xi=\text{const}$, *либо на прямой* $\eta=\text{const}$.

Если имеют место свойства 1), 2) *леммы* 11, *то* $f(z)$ *является аналитической функцией внутри* $\mathfrak{D}$.

Доказательство мы приводить не будем: оно аналогично предыдущему. Отметим лишь, что в данном случае вместо прямоугольников $\mathfrak{R}[x_1, x_2; y_1, y_2]$ рассматривают параллелограммы $\mathfrak{Q}[\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2]$ со сторонами, параллельными осям координат ξ, η. При этом интеграл по контуру параллелограмма $\mathfrak{Q}$ получается из $\int f(z)\,dz$ подстановкой $z=\xi+\eta e^{i\alpha}$, где α—угол между осями координат ξ и η; условия Коши — Римана заменяются здесь следующими равенствами:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial \eta}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial \eta}\sin\alpha,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}=\frac{\partial v}{\partial \eta}\cos\alpha-\frac{\partial u}{\partial \eta}\sin\alpha.$$

Замечание. В каждой из лемм 11 и 11′ мы пользуемся обобщенной теоремой Морера. В связи с последней отметим, что имеет место следующая весьма общая теорема (см. [21]):

Если для всякого замкнутого выпуклого контура C *в области* $\mathfrak{D}$

$$\int\limits_C f(z)\,dz=0, \qquad (*)$$

где $f(z)$ *измерима в* $\mathfrak{D}$ *и интеграл берется в смысле Лебега, то* $f(z)$ *с точностью до изменения на множестве меры нуль есть функция, аналитическая в* $\mathfrak{D}$.

Было бы интересно выяснить, справедлива ли эта теорема, если (*) понимать как интеграл в смысле Данжуа, Данжуа — Хинчина, A-интеграл и т. д.

Докажем теперь теорему 3′.

Доказательство теоремы 3′. Предположим, что утверждение этой теоремы неверно. Тогда найдется точка области $\mathfrak{D}$, в которой функция $f(z)$ не является аналитической. Совокупность $\mathfrak{P}$ всех таких точек является, очевидно, замкнутым множеством в $\mathfrak{D}$; но так как функция $f(z)$ непрерывна, то множество $\mathfrak{P}$ не может содержать изолированные точки, т. е. $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$ есть даже совершенное множество. Из определения этого множества следует, что в точках его (открытого) дополнения $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ функция $f(z)$ является аналитической.

Рассмотрим множества $\mathfrak{D}^{(1)} = \bigcup\limits_n \mathfrak{D}_n^{(1)}$ и $\mathfrak{D}^{(2)} = \bigcup\limits_n \mathfrak{D}_n^{(2)}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, где

$$\mathfrak{D}_n^{(1)} = \underset{z}{\mathfrak{D}} \left\{ \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| \leqslant n;\ |z' - z| < \frac{1}{n} \right\},$$

$$\mathfrak{D}_n^{(2)} = \underset{z}{\mathfrak{D}} \left\{ \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| \geqslant \frac{1}{n};\ |z' - z| < \frac{1}{n} \right\},$$

другими словами, $\mathfrak{D}_n^{(1)}$ и $\mathfrak{D}_n^{(2)}$ определяются как множества всех точек z области $\mathfrak{D}$, для каждой из которых имеет место неравенство, указанное в фигурных скобках, при всех $z' \neq z$ ее $\frac{1}{n}$-окрестности.

Как и в § 2 главы 1, легко показать, что эти множества замкнуты в $\mathfrak{D}$. В силу постоянства растяжений отображения $w = f(z)$ имеем

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(1)} \cup \mathfrak{D}^{(2)} \cup \mathfrak{H}, \tag{3}$$

где $\mathfrak{H}$ — не более чем счетное множество, входящее в формулировку теоремы.

Пересечение совершенного множества $\mathfrak{P}$ с $\mathfrak{D}_n^{(k)}$ обозначим через $\mathfrak{P}_n^{(k)}$ $(k = 1,\ 2;\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Очевидно, каждое множество $\mathfrak{P}_n^k$ замкнуто и в $\mathfrak{D}$ и в $\mathfrak{P}$. Из (3) получим

$$\mathfrak{P} = \bigcup_{k,\ n} \mathfrak{P}_n^{(k)} \bigcup \mathfrak{h},$$

где $\mathfrak{h} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{P}$ — не более чем счетно и, следовательно, является множеством первой категории на $\mathfrak{P}$ (см. приложение, § 1).

Отсюда следует, что сумма всех $\mathfrak{P}_n^{(k)}$ как дополнение к $\mathfrak{h}$ является множеством всюду второй категории на совершенном множестве $\mathfrak{P}$. Поэтому найдется порция его $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}'$ (где $\mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$ — некоторый круг), на которой одно из множеств $\mathfrak{P}_n^{(1)}$ и $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ всюду плотно; но так как эти множества замкнуты в $\mathfrak{P}$, то порция $\mathfrak{P}'$ внутри $\mathfrak{D}'$ просто совпадает с одним из множеств $\mathfrak{P}_n^{(1)}$, $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть сначала $\mathfrak{P}'$ есть некоторое $\mathfrak{P}_n^{(1)}$ внутри круга $\mathfrak{D}'$; диаметр этого круга выберем меньше $\frac{1}{n}$. Тогда из определения множества $\mathfrak{P}_n^{(1)}$ следует, что

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant n\,|z_2 - z_1| \tag{4}$$

для всех z_1, $z_2 \in \mathfrak{P}$.

Покажем, что в круге $\mathfrak{D}'$ выполнены и все остальные условия леммы 11. Так как в точках множества $\mathfrak{D}' \setminus \mathfrak{P}'$ функция $f(z)$ является аналитической, а в силу леммы 9 почти всюду в $\mathfrak{D}'$ существует производная $f'(z)$, то остается лишь доказать суммируемость этой производной внутри $\mathfrak{D}'$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_1'$ и $\mathfrak{P}_1'$ образы круга $\mathfrak{D}'$ и множества $\mathfrak{P}'$ при однолистном отображении $w = f(z)$; тогда, как известно,

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}' \setminus \mathfrak{P}'} |f'(z)|^2\,dx\,dy = \operatorname{Mes}(\mathfrak{D}_1' \setminus \mathfrak{P}_1') < \infty;$$

из (4), очевидно, следует, что

$$\iint\limits_{\mathfrak{P}'} |f'(z)|^2\,dx\,dy \leqslant n^2 \operatorname{Mes} \mathfrak{P}'.$$

Из этих соотношений и вытекает суммируемость $f'(z)$ (даже с квадратом). В силу леммы 11 функция $f(z)$ должна быть аналитической всюду внутри круга $\mathfrak{D}'$ и, в частности, в точках множества $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, что по предположению невозможно.

Пусть теперь $\mathfrak{P}'$ совпадает в круге $\mathfrak{D}'$ с одним из множеств $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; взяв диаметр этого круга меньше $\frac{1}{n}$, в силу определения множества $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ получим

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| = \left| \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \right| \geqslant \frac{1}{n}$$

для всех z_1, $z_2 \in \mathfrak{P}'$.

Для функции $\varphi(w)$, обратной к $f(z)$ и определенной в соответствующей области $\mathfrak{D}_1'$ плоскости w, это неравенство дает

$$\left|\frac{\varphi(w_2)-\varphi(w_1)}{w_2-w_1}\right|=\left|\frac{z_2-z_1}{w_2-w_1}\right|\leqslant n$$

для всех w_1, $w_2\in\mathfrak{P}_1'$, где $\mathfrak{P}_l'$ — образ множества $\mathfrak{P}'$ при отображении $w=f(z)$. Так как в точках множества $\mathfrak{D}_1'\setminus\mathfrak{P}_1'$ функция $\varphi(w)$ является аналитической и имеет место лемма 10, то применимы все предыдущие рассуждения, из которых следует, что $\varphi(w)$ аналитична внутри $\mathfrak{D}_1'$; поэтому и прямая функция $f(z)$ является аналитической всюду в круге $\mathfrak{D}'$, что опять-таки противоречиво.

Итак, наше предположение, что утверждение теоремы неверно, приводит к противоречию.

Тем самым теорема 3', вместе с ней и теорема 3, доказана.

Формулировка этих теорем исключает из рассмотрения возможное не более чем счетное множество точек, о которых заранее ничего не известно: аналитичность функции в каждой из них проявляется затем автоматически. Это указывает на сравнительно большую разреженность счетных (хотя бы и всюду плотных) множеств, которую мы и фактически учитывали: ведь счетное множество — всегда первой категории на каждом совершенном множестве¹).

Оказывается, для справедливости этих теорем в общем случае нельзя, например, требовать лишь того, чтобы исключительное множество было нигде не плотным, или первой категории, или меры нуль и т. п.; это показывают следующие примеры.

Пусть $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная сингулярная функция на отрезке $[0, 1]$, т. е. непостоянная функция, для которой производная $\varphi'(x)=0$ почти всюду на $[0,1]$. Тогда однолистная функция $f(z)=z-i\varphi(x)$ моногенна почти всюду в квадрате $\mathfrak{Q}[0, 1;\ 0, 1]$, причем $f'(z)=1$, но не является аналитической.

---

¹) Отметим, кстати, что если мощность континуума является первой несчетной мощностью (проблема континуума), то (см. [41]) существует несчетное множество первой категории на каждом совершенном множестве.

Легко построить такую функцию $f(z)$ с нигде не плотным (и совершенным) исключительным множеством.

Заметим, далее, что в формулировке теоремы мы допускали и бесконечные значения для растяжения. Действительно, легко привести примеры однолистных функций, которые обладают бесконечным растяжением в отдельных точках $\left(\text{например, } f(z) = -z \ln|z|,\ f(0)=0;\ |z| < \frac{1}{e}\right)$. Теорема 3 показывает, однако, что требование постоянства растяжения в *каждой* точке области $\mathfrak{D}$ (исключая, быть может, конечное или счетное их множество) с a priori возможными *бесконечными* значениями приводит a posteriori лишь к *конечным* рястяжениям.

В дальнейшем мы еще столкнемся с подобными явлениями.

§ 2. Отображения со свойствами K'', K'''

В этом параграфе мы докажем следующие теоремы (Д. Е. Меньшов [42]):

Теорема 4. *Если непрерывное и однолистное отображение $w = f(z)$ области $\mathfrak{D}$ обладает свойством K'' в каждой ее точке*[1]*, исключая не более чем счетное их множество, то либо функция $f(z)$, либо ей сопряженная $\overline{f(z)}$ является аналитической всюду в $\mathfrak{D}$.*

Теорема 5. *Если непрерывное и однолистное отображение $w = f(z)$ области $\mathfrak{D}$ обладает свойством K''' в каждой ее точке, исключая не более чем счетное их множество, то функция $f(z)$ является аналитической всюду в $\mathfrak{D}$.*

Как и в § 1, убеждаемся, что для доказательства теоремы 4 достаточно доказать такое предложение:

Теорема 4′. *Если непрерывное однолистное и прямое отображение $w = f(z)$ области обладает свойством K'' в каждой ее точке, исключая не более чем счетное их множество, то функция $f(z)$ является аналитической всюду в $\mathfrak{D}$.*

Для доказательства приведем ряд лемм.

Заметим сначала, что в условиях приведенных теорем направления лучей $t_i(z)$, входящих в определение свойств K'', K''',

---

[1] Определение свойств K', K'', K''' см. §§ 3, 4 главы 1.

могут как угодно меняться от точки к точке. Поэтому простейшим является случай, когда эти направления просто одинаковы и, кроме того, растяжения вдоль лучей $t_i(z)$ равномерно ограничены. Первая лемма, которую мы собираемся доказать, и сводит в некотором смысле самый общий случай к этому простейшему.

Вот ее точная формулировка [42]:

Лемма 12. *Пусть* $f(z)$ — *произвольная непрерывная функция в области* $\mathfrak{D}$ *и* $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{D}$ — *некоторое совершенное множество точек. Обозначим через* $\nu>0$ *целое число, не зависящее от* z, *и предположим, что существует множество* $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{P}$ *не первой категории на* $\mathfrak{P}$, *такое, что из каждой точки* $z\in\mathfrak{N}$ *исходят* ν *прямолинейных лучей* $t_i(z)$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$, *расположенных на различных прямых, причем*

$$\overline{\lim_{n\to 0}}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|<\infty,$$

где $z+h\in t_i(z)$, $\quad i=1, 2, \ldots, \nu$.

Тогда найдутся порция $\mathfrak{P}'\subset\mathfrak{P}$, *расположенная внутри области* $\mathfrak{D}$, *и положительное число* σ, *такие, что из каждой точки* $z\in\mathfrak{P}$ *исходят* ν *прямолинейных лучей* $\tau_i(z)$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$, *обладающих следующими свойствами*:

1) $[\tau_i(z'),\widehat{\ }\tau_i(z'')]<\sigma$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$ *для любых точек* $z', z''\in\mathfrak{P}'$.

2) $800\sigma<[\tau_i(z),\widehat{\ }\tau_j(z)]<\pi-800\sigma$[1]
при $i\neq j$ $(i, j=1, 2, \ldots, \nu)$ *и для каждой точки* $z\in\mathfrak{P}'$;

3) *расстояние от множества* $\mathfrak{P}'$ *до границы области* $\mathfrak{D}$ *больше* σ;

4) $\left|\dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right|<\dfrac{1}{\sigma}$
для каждой точки $z\in\mathfrak{P}'$ *и всех* $\zeta\in\tau_i(z)$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$, *удовлетворяющих неравенствам* $0<|\zeta-z|<\sigma$.

Доказательство. Фиксируем определенный луч t в плоскости z и обозначим через

$$\mathfrak{N}(p, n_1, n_2, \ldots, n_\nu)=\mathfrak{N}(p, n_i)$$

---

[1] При этом $\sigma<\dfrac{\pi}{1600}$.

множество точек $z \in \mathfrak{N}$, удовлетворяющих условиям:

$$(A) \qquad \left|\{t\widehat{,}\,t_i(z)\} - \frac{n_i}{800p}\right| < \frac{1}{800p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

где через $\{t\widehat{,}\,t_i(z)\}$ обозначена величина угла, отсчитываемого в положительном направлении от t, заключенная между 0 и 2π,

$$(\text{Б}) \qquad \frac{8}{p} < [t_i(z)\widehat{,}\,t_j(z)] < \pi - \frac{8}{p}$$

при $i \neq j$ $(i,\ j, = 1, 2, \ldots, \nu)$ и

$$(\text{В}) \qquad \left|\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\right| < p$$

для всех точек ζ лучей $t_i(z)\,(i = 1, 2, \ldots, \nu)$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < |\zeta - z| \leqslant \frac{1}{200p}.$$

Из определения множества $\mathfrak{N}$ следует, что

$$\bigcup \mathfrak{N}(n_i,\ p) = \mathfrak{N},$$

где суммирование распространено на всевозможные целые положительные значения чисел p, n_1, n_2, ..., n_ν.

Так как $\mathfrak{N}$ — не первой категории на $\mathfrak{P}$, то найдутся определенные значения p, n_i такие, что соответствующее им множество $\mathfrak{N}(p,\ n_i)$ будет всюду плотно на некоторой порции $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, причем $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}'$, где $\overline{\mathfrak{D}}', \subset \mathfrak{D}$ — некоторый круг. Очевидно, можно предположить, что расстояние от множества $\mathfrak{P}'$ до границы области $\mathfrak{D}$ больше $\frac{1}{200p}$.

Для указанных значений p, n_i положим

$$\mathfrak{N}(p,\ n_i) = \mathfrak{N}', \quad \frac{1}{200p} = \sigma. \tag{5}$$

Докажем, что для множества $\mathfrak{P}'$ и так определенного числа $\sigma > 0$ имеют место все свойства, указанные в лемме.

Для этого определим в точках $z \in \mathfrak{P}'$ лучи $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ следующим образом: полагаем $\tau_i(z) = t_i(z)$ для точек $z \in \mathfrak{P}' \cap \mathfrak{N}'$, а для точек $z \in \mathfrak{P}' \setminus \mathfrak{N}'$ в качестве $\tau_i(z)$ возьмем одно из предельных положений лучей $t_i(z')$, когда точки $z' \in \mathfrak{N}'$ сходятся к z; такое определение возможно в силу плотности $\mathfrak{N}'$ на $\mathfrak{P}'$.

Из неравенств (А) следует теперь, что

$$[\tau_i(z')\widehat{,}\,\tau_i(z'')] \leqslant \frac{1}{400p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

для всех точек z', $z'' \in \mathfrak{P}'$, а из неравенства (Б) получим

$$\frac{8}{p} \leqslant [\tau_i(z),\widehat{\ }\tau_j(z) \leqslant \pi - \frac{8}{p}$$

при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, \nu)$ для всех точек $z \in \mathfrak{P}'$.

Из последних неравенств в силу определения (5) числа σ следует, что для лучей $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ выполнены свойства 1) и 2) леммы. Так как расстояние от множества $\mathfrak{P}$ до границы области $\mathfrak{D}$ больше $\frac{1}{200p}$, то имеем также и свойство 3).

Перейдем к доказательству свойства 4).

Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное число, удовлетворяющее неравенству $\varepsilon \leqslant \frac{1}{200p}$, и $z \in \mathfrak{P}' \setminus \mathfrak{N}'$ — произвольная точка[1]).

Обозначим через ζ_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ точку луча $\tau_i(z)$, для которой

$$|\zeta_i - z| = \varepsilon. \tag{6}$$

Если $z' \in \mathfrak{N}'$, то через ζ_i' $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ обозначим точку луча $t_i(z')$, для которой

$$|\zeta_i' - z'| = \varepsilon, \tag{7}$$

и, следовательно, в силу выбора ε

$$|\zeta_i' - z'| \leqslant \sigma.$$

Из неравенства (В) следует тогда, что

$$\left|\frac{f(\zeta_i') - f(z')}{\zeta_i' - z'}\right| < p \qquad (i = 1, \ldots, \nu). \tag{8}$$

Луч $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ есть одно из предельных положений лучей $t_i(z')$, когда z' стремится к z. Из (6) и (7) следует, что точки ζ_i' стремятся при этом к ζ_i; поэтому в силу непрерывности $f(z)$ и определения σ из (8) получим

$$\left|\frac{f(\zeta_i) - f(z)}{\zeta_i - z}\right| < \frac{1}{\sigma} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

---

[1]) Для точек $\mathfrak{N}'$ свойство 4) очевидно.

При учете произвольности ε, $0 < \varepsilon \leqslant \sigma$, отсюда и следует свойство 4) леммы.

Лемма 12 доказана.

Мы используем лемму 12 для доказательства всех последующих лемм настоящего параграфа.

Лемма 13. *Пусть в области* $\mathfrak{D}$ *задана произвольная непрерывная функция* $f(z)$ *и* $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$ — *некоторое совершенное множество. Пусть из каждой точки* z *некоторого множества* $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{P}$ *не первой категории на* $\mathfrak{P}$ *исходят три луча* $t_l(z)\,(l = 1, 2, 3)$, *расположенные на различных прямых, причем*

$$\varlimsup_{h\to 0}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right| < \infty,$$

где $z+h \in t_l(z)$ $(l = 1, 2, 3)$.

Тогда найдутся порция $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}$ *и постоянная* $L > 0$ такие, что

$$|f(z_2)-f(z_1)| < L\,|z_2 - z_1|$$

для произвольных точек z_1, $z_2 \in \mathfrak{P}_0$.

Доказательство. В силу леммы 12, взятой для нашего случая $\nu = 3$, найдутся порция $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$ и число $\sigma > 0$, удовлетворяющие условиям 1) — 4) этой леммы.

Возьмем произвольную точку $z \in \mathfrak{P}'$.

Так как $\mathfrak{P}'$ открыто относительно $\mathfrak{P}$, то существует круг $|z' - z| < r$ с центром в точке z такой, что порция $\mathfrak{P}_0$ множества $\mathfrak{P}'$, определяемая этим кругом, является одновременно и порцией множества $\mathfrak{P}$; очевидно, можно считать, что этот круг расположен внутри концентрического круга

$$|z' - z| < \frac{1}{2}\,\sigma \sin 700\sigma. \tag{9}$$

Докажем для найденной порции $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}$ утверждение леммы 13.

Рассмотрим произвольные точки z_1, $z_2 \in \mathfrak{P}_0$, $z_1 \neq z_2$. Могут представиться две возможности.

1. Одна из точек z_1, z_2 лежит на луче $\tau_l(z_1)$, $\tau_l(z_2)$ $(l = 1, 2, 3)$, соответствующем другой точке.

Тогда в силу свойства 4) леммы 12 будем иметь

$$|f(z_2)-f(z_1)| < \frac{1}{\sigma}\,|z_2 - z_1|.$$

2. Каждая из точек z_1 и z_2 лежит внутри одного из углов, образованных лучами $\tau_i(z_1)$, $\tau_i(z_2)$ $(i = 1, 2, 3)$, соответствующими другой точке.

Предположим для определенности, что точка z_2 лежит внутри угла, образованного лучами $\tau_1(z_1)$ и $\tau_2(z_1)$ (рис. 1)

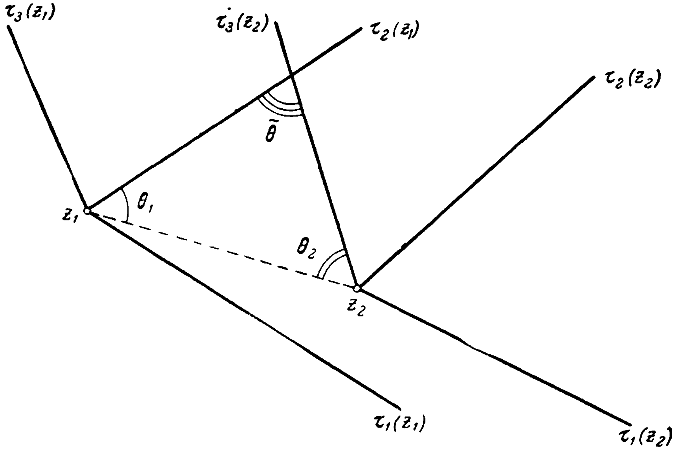

Рис. 1.

Из свойств 1) и 2) лучей $\tau_i(z)$ (лемма 12) вытекает, что

$$700\sigma < [\tau_i(z_1)\,\hat{}\,\tau_j(z_2)] < \pi - 700\sigma \tag{10}$$

при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$; отсюда следует, что луч $\tau_3(z_2)$ обязательно пересекает один из лучей $\tau_1(z_1)$ и $\tau_2(z_1)$ в некоторой точке $\tilde{z}$ на плоскости. Пусть $\tilde{z} \in \tau_2(z_1)$.

Рассмотрим треугольник с вершинами в точках z_1, z_2, $\tilde{z}$ и соответственными углами θ_1, θ_2, $\tilde{\theta} \equiv [\tau_2(z_1)\,\hat{}\,\tau_3(z_2)]$. Из (10) имеем

$$700\sigma < \tilde{\theta} < \pi - 700\sigma,$$

и следовательно,

$$\sin\tilde{\theta} > \sin 700\sigma.$$

Легко находим

$$|z_1 - \tilde{z}| = \frac{\sin\theta_2}{\sin\tilde{\theta}}|z_2 - z_1| < \frac{1}{\sin 700\sigma}|z_2 - z_1|. \tag{11}$$

Но из (9) следует, что $|z_2 - z_1| < \sigma \sin 700\sigma$; поэтому в силу (11)

$$|z_1 - \tilde{z}| < \sigma,$$

т. е. точка $\tilde{z}$ принадлежит области $\mathfrak{D}$, что следует из свойства 3) леммы 12. Но тогда на основании свойства 4) той же леммы имеем

$$\left| \frac{f(z_1) - f(\tilde{z})}{z_1 - \tilde{z}} \right| < \frac{1}{\sigma}. \tag{12}$$

Аналогично получим неравенства

$$|z_2 - \tilde{z}| < \frac{1}{\sin 700\sigma} |z_2 - z_1|, \tag{13}$$

$$\left| \frac{f(z_2) - f(\tilde{z})}{z_2 - \tilde{z}} \right| < \frac{1}{\sigma}.$$

Из (11), (12) и (13) следует

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| \leqslant \frac{|f(z_2) - f(\tilde{z})| + |f(z_1) - f(\tilde{z})|}{|z_2 - z_1|} <$$

$$< \frac{1}{\sin 700\sigma} \left| \frac{f(z_2) - f(\tilde{z})}{z_2 - \tilde{z}} \right| + \frac{1}{\sin 700\sigma} \left| \frac{f(z_1) - f(\tilde{z})}{z_1 - \tilde{z}} \right| <$$

$$< \frac{2}{\sigma \sin 700\sigma} < \frac{2}{\sigma^2}$$

$$\left(\sin 700\sigma > \sigma, \text{ так как } \sigma < \frac{\pi}{1600} \right).$$

Объединяя рассмотренные случаи 1 и 2, заключаем, что для любых точек $z_1, z_2 \in \mathfrak{P}_0$ имеет место неравенство

$$|f(z_2) + f(z_1)| < L |z_2 - z_1|,$$

где $L = \frac{2}{\sigma^2} > \frac{1}{\sigma}$ — постоянная.

Лемма 13 доказана.

Совершенно аналогично лемме 13 доказывается следующее утверждение, которое мы также используем в главе 4 и дадим в соответствующей форме.

Лемма 14. *Пусть* $z = \varphi(w)$ — *непрерывная в области* $\mathfrak{D}_1$ *функция и* $\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{D}_1$ — *совершенное множество. Пусть из каждой точки* $w \in \mathfrak{D}_1$ *как из вершины* *исходят три угла* $\Omega_i(w)$ $(i=1,\,2,\,3)$, *полученных параллельным смещением фиксированной тройки углов* Ω_1, Ω_2, Ω_3 *со следующими свойствами*:

1) *раствор каждого из этих углов равен* 4σ, $\sigma>0$,

2) $800\sigma<[\Omega_i,\ \Omega_j]<\pi-800\sigma$ $(i\neq j)$, *где* $[\Omega_i,\hat{}\ \Omega_j]$ *определяется как угол между биссектрисами* Ω_i, Ω_j.

Наконец, пусть из каждой точки $w\in\mathfrak{P}_1$ *исходят три простые дуги* $L_i(w)$ $(i=1,\,2,\,3)$, *расположенные внутри соответственных углов* $\Omega_i(w)$, *со следующими свойствами*:

а) *диаметры этих дуг* $\geqslant\delta>0$ *и*

б) $\left|\dfrac{\varphi(w')-\varphi(w)}{w'-w}\right|<\dfrac{1}{\sigma}$

для всех $w'\in L_i(w)$ $(i=1,\,2,\,3)$, *удовлетворяющих неравенствам* $0<|w'-w|\leqslant\delta$.

Тогда найдутся порция $\mathfrak{P}_1'\subset\mathfrak{P}_1$ *и положительное число* L, *такие, что*

$$|\varphi(w_2)-\varphi(w_1)|<L\,|w_2-w_1|$$

для произвольных точек w_1, $w_2\in\mathfrak{P}_1'$.

Итак, для случая $\nu=3$ в условиях леммы 13 (а также леммы 14) найдется порция $\mathfrak{P}_0$ множества $\mathfrak{P}$, на которой значения функции $f(z)$ удовлетворяют условию Липшица.

Оказывается, что в случае $\nu=2$ такое утверждение неверно.

В самом деле, пусть $\varphi(x)$ — непрерывная на оси Ox функция, нигде не дифференцируемая; определим непрерывную в плоскости z функцию $f(z)$ следующим образом:

$$f(z)=f(x+iy)=\begin{cases}\varphi(x-y) & \text{при} \quad y\geqslant 0,\\ \varphi(x+y) & \text{при} \quad y\leqslant 0.\end{cases}$$

Ясно, что вдоль лучей $x-y=\text{const}$, $y\geqslant 0$ и лучей $x+y=\text{const}$, $y\leqslant 0$ имеем

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|=0,$$

и в то же время ни на каком отрезке оси Ox (играющей роль множества $\mathfrak{P}$), в точках которой $f(z)=\varphi(x)$, функция $f(z)$ не удовлетворяет условию Липшица.

Можно построить подобную функцию $f(z)$ даже со всюду конечными производными числами вне оси Ox.

Следовательно, в случае $\nu=2$ выполнения условия

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h_i}\right|<\infty, \qquad z+h\in t_1(z),\ t_2(z),$$

даже всюду в области недостаточно, вообще говоря, для справедливости утверждения леммы 13.

Итак, случай $\nu=2$ существенно отличается от случая $\nu=3$. Вспоминая доказательство леммы 13, можно объяснить причину этого явления так: тройки лучей $t_i(z)$ $(i=1, 2, 3)$ «почти» одинакового направления образуют хорошо сцепленную систему в отличие от системы пар лучей $t_i(z)$ $(i=1, 2)$.

Указанное отличие создает некоторые дополнительные трудности при доказательстве теоремы о свойстве K'''.

Приведем две леммы для случая $\nu=2$.

Лемма 15. *Пусть $f(z)$ — произвольная непрерывная в области $\mathfrak{D}$ функция и $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{D}$ — совершенное множество. Пусть из каждой точки z некоторого множества $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{P}$ не первой категории на $\mathfrak{P}$ исходят два луча $t_i(z)$ $(i=1, 2)$, расположенные на различных прямых, причем*

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|<\infty,$$

где $z+h\in t_i(z)$ $(i=1, 2)$.

Тогда найдутся круг $\overline{\mathfrak{D}}_0\subset\mathfrak{D}$, содержащий порцию $\mathfrak{P}_0\subset\mathfrak{P}$, и число L, такие, что каждая точка $z\in\mathfrak{P}_0$ является вершиной пары вертикальных углов $V(z)$, полученных параллельным смещением фиксированных вертикальных углов V, со следующим свойством: для каждой точки $z'\in\mathfrak{P}_0\cap\mathfrak{D}_0$, расположенной внутри или на границе углов $V(z)$, имеет место неравенство

$$|f(z')-f(z)|<L|z'-z|.$$

При этом $f(z)$ почти всюду на $\mathfrak{P}_0$ имеет полный дифференциал относительно $\mathfrak{P}_0$.

Доказательство. Применяя лемму 12 для $\nu=2$, находим порцию $\mathfrak{P}'\subset\mathfrak{P}$ и число σ, удовлетворяющие условиям 1) — 4).

Как и при доказательстве леммы 13, берем в качестве $\mathfrak{P}_0$ порцию множества $\mathfrak{P}'$, расположенную в некотором круге $\mathfrak{D}_0$ с диаметром, меньшим $\sigma \sin 700\sigma$. Для этого $\mathfrak{P}_0$ докажем утверждение леммы 15.

Из свойств 1) и 2) лучей $\tau_i(z)$ $(i=1, 2)$ следует, что на плоскости z найдется фиксированная прямая s, удовлетворяющая условиям:

а) лучи $\tau_1(z)$ и $\tau_2(z)$ лежат по одну сторону от прямой $s(z)$, проходящей через точку z параллельно прямой s;

б) углы, образуемые лучами $\tau_1(z)$, $\tau_2(z)$ с каждым из направлений прямой $s(z)$, по величине больше 350σ.

Отсюда вытекает, что вертикальные углы $V(z)$ с общей вершиной z, общей биссектрисой $s(z)$, каждый из которых равен 30σ, обладают следующими свойствами:

1) лучи $\tau_1(z)$ и $\tau_2(z)$ лежат по одну сторону от каждой прямой, проходящей внутри $V(z)$ и через точку z;

2) углы между лучами $\tau_1(z)$, $\tau_2(z)$ и каждым направлением такой прямой больше 300σ.

Пусть теперь $z \in \mathfrak{P}_0$. Если внутри $V(z)$ находится точка $z' \in \mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{D}_0$, то

$$|f(z') - f(z)| < L\,|z' - z|, \tag{14}$$

где $L = \frac{2}{\sigma^2}$.

В самом деле, в силу построения вертикальных углов $V(z)$ все лучи $\tau_i(z)$, $\tau_i(z')$ $(i=1, 2)$ лежат по одну сторону от прямой $\overline{zz'} \subset V(z)$; из свойства 2) леммы 12 следует тогда, что либо $\tau_1(z)$ и $\tau_2(z')$ либо $\tau_2(z)$ и $\tau_1(z')$ пересекаются в некоторой точке $\tilde{z}$. Отсюда, как и в лемме 13, следует (14).

Для доказательства последнего утверждения леммы заметим, что неравенство (14) имеет место и для компонент $u(x, y)$, $v(x, y)$ функции $f(z) = u + iv$. Отсюда легко следует, что поверхности $Z = u(x, y)$, $Z = v(x, y)$, определенные лишь для точек $(x, y) \in \mathfrak{P}_0$, имеют в каждой своей точке контингенцию, не являющуюся ни полным пространством, ни полупространством, так как не пересекается с некоторым круговым двуполостным конусом (ось симметрии которого, вообще говоря, не параллельна оси Z). Следовательно (см. приложение, § 3), почти всюду на $\mathfrak{P}_0$ функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, а потому и $f(z)$, дифференцируемы относительно $\mathfrak{P}_0$.

Лемма 15 полностью доказана.

Докажем теперь такую лемму:

Лемма 16. *Пусть непрерывная в области $\mathfrak{D}$ функция $f(z)$ является аналитической всюду вне совершенного множества $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{D}$.*

Пусть из каждой точки z некоторого множества $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{P}$ не первой категории на $\mathfrak{P}$ исходят два луча $t_i(z)$ $(i=1,\ 2)$, расположенных на различных прямых, причем

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|<\infty,$$

где $z+h\in t_i(z)$ $(i=1,\ 2)$.

Тогда найдется порция $\mathfrak{P}_0\subset\mathfrak{P}$, почти во всех точках которой $f(z)$ имеет полный дифференциал.

Доказательство. В силу лемм 12 и 15 находим порцию $\mathfrak{P}_0\subset\mathfrak{P}$, из каждой точки которой исходят два луча $\tau_i(z)$ $(i=1,\ 2)$, обладающих свойствами 1) — 4) леммы 12, причем почти всюду на $\mathfrak{P}_0$ функция $f(z)$ имеет полный дифференциал относительно $\mathfrak{P}_0$.

Пусть z — произвольная точка плотности множества $\mathfrak{P}_0$, в которой такой дифференциал существует. Мы покажем, что

$$\overline{\lim_{z'\to z}}\left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}\right|<\infty \qquad (z'\in\mathfrak{D}); \tag{15}$$

по теореме В. В. Степанова отсюда и будет следовать утверждение (см. приложение, § 3).

Обозначим через $\mathfrak{P}_0^{(r)}$ часть множества $\mathfrak{P}_0$, лежащую внутри круга $\mathfrak{K}_r: |z'-z|<r$; тогда в силу выбора точки z

$$\lim_{r\to 0}\frac{\operatorname{Mes}\mathfrak{P}_0^{(r)}}{\pi r^2}=1,$$

$$\overline{\lim_{z'\to z}}\left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}\right|<\infty, \qquad z'\in\mathfrak{P}_0.$$

Следовательно, найдутся числа r_0 и L такие, что для всех $r\leqslant r_0$ будем иметь

$$\operatorname{Mes}\mathfrak{P}_0^{(r)}>\pi r^2(1-\sigma^2), \tag{16}$$

$$\left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}\right|<L \quad \text{при} \quad z'\in\mathfrak{P}_0^{(r)}, \tag{17}$$

где $\sigma>0$ — число, фигурирующее в лемме 12, Введем временную прямоугольную систему координат $\xi\eta$ с началом в точке z, направив положительную полуось ξ вдоль биссектрисы угла $[\tau_1(z)\widehat{,}\ \tau_2(z)]$, где $\tau_1(z)$, $\tau_2(z)$ — лучи, выходящие из точки z (рис. 2).

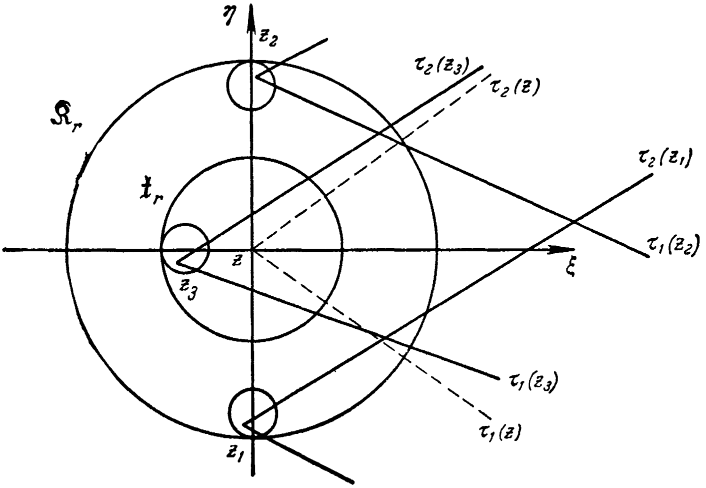

Рис. 2.

Из свойств 1), 2) леммы 12 следует, что острые углы между осями координат $\overline{z\xi}$, $\overline{z\eta}$ и лучами $\tau_i(z')$, $i = 1, 2$ $(z' \in \mathfrak{P}_0)$, удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} 300\sigma &< [\tau_i(z')\widehat{,}\,\overline{z\xi}] < \frac{\pi}{2} - 300\sigma, \\ 300\sigma &< [\tau_i(z')\widehat{,}\,\overline{z\eta}] < \frac{\pi}{2} - 300\sigma. \end{aligned} \qquad (18)$$

Направив ось η вертикально вверх, назовем один из лучей точки z — пусть $\tau_1(z)$ — нижним, если он лежит в нижней полуплоскости $\eta \leqslant 0$, а другой, $\tau_2(z)$, — верхним. В силу (18) и 1) леммы 12 для всех остальных точек $z' \in \mathfrak{P}_0$ также естественно определить нижние лучи — это будут всегда $\tau_1(z')$ — и верхние — $\tau_2(z')$.

Рассмотрим два концентрических круга $\mathfrak{K}_r$ и $\mathfrak{k}_r$ с центром в точке z и соответственными радиусами $r \leqslant r_0$ и $150r\sigma$; в силу выбора σ, $\sigma < \frac{\pi}{1600}$, имеем $150r\sigma < \frac{r}{3}$.

Построим три круга радиуса $r\sigma$: два из них — внутри круга $\mathfrak{K}_r$ с точками касания (с $\mathfrak{K}_r$) на оси η, третий — внутри $\mathfrak{k}_r$ с точкой касания на отрицательной полуоси ξ. Из (16) следует, что в каждом из построенных кругов находятся точки множества $\mathfrak{P}_0$; выберем в них по одной такой точке, обозначив их соответственно z_1, z_2, z_3. Будем считать, что z_1 лежит в нижней полуплоскости $\eta < 0$. В силу 2) леммы 12 верхний луч точки z_1, т. е. $\tau_2(z_1)$, пересекает нижний луч $\tau_1(z_2)$ точки z_2, при этом расстояние точки пересечения до z меньше $\frac{2}{\sigma}r$ (если учесть, что в наших условиях $\sin 600\sigma > \sigma$).

В силу (18) лучи $\tau_l(z_3)$ $(l = 1,\ 2)$ третьей точки z_3 пересекают обе полуоси η в точках, отстоящих от z не более чем на $\frac{r}{2}$ и, следовательно (опять-таки в силу (18)) пересекают указанные выше лучи $\tau_1(z_2)$, $\tau_2(z_1)$ точек z_1 и z_2. Эти четыре луча при пересечении образуют замкнутую ломаную (четырехугольник) q_r, диаметр которого меньше $\frac{4}{\sigma}r = L_1(\sigma)r$. Из построения ломаной q_r следует далее, что внутри нее содержится и точка z; при этом расстояние от z до q_r больше $(200\sigma)^2 r = L_2(\sigma)r$.

Так как для каждой из точек z_1, z_2, z_3 лучи одной из них пересекаются лучами двух других (см. выше), то, как и при доказательстве леммы 13, получаем

$$|f(z_k) - f(z_l)| < L(\sigma)\,|z_k - z_l| \tag{19}$$

при $k,\ l = 1,\ 2,\ 3$ и $L(\sigma) = \frac{2}{\sigma^2}$.

Рассматривая теперь различные случаи взаимного расположения двух точек z', z'' на ломаной q_r с помощью (19), свойства 4) леммы 12, а также используя оценку диаметра $d(q_r) < L_1(\sigma)r$, получим неравенство

$$|f(z'') - f(z')| < L_3(\sigma)\,r \tag{20}$$

для любых z', $z'' \in q_r$; при этом $L_3(\sigma) = \frac{8}{\sigma^3}$.

Так как точка z находится внутри ломаной q_r, то, например, $\tau_1(z)$ пересекает ее в некоторой точке z'' и, следовательно,

$$|f(z'')-f(z)|<L_1(\sigma)|z''-z|<L_4(\sigma)r, \qquad (21)$$

где $L_4(\sigma)=[L_1(\sigma)]^2=\frac{16}{\sigma^2}$.

Из (20) и (21) находим

$$|f(z')-f(z)|<L_5(\sigma)r,$$

где $z'\in q_r$ — произвольная точка; так как $|z'-z|>L_2(\sigma)r$ (см. выше), то имеем, наконец,

$$|f(z')-f(z)|<L_6(\sigma)|z'-z| \qquad (22)$$

для любой точки $z'\in q_r$.

Итак, показано, что при любом $r\leqslant r_0$ найдется простая замкнутая ломаная q_r, содержащая строго внутри точку z, причем диаметр $d(q_r)<L_1(\sigma)r$ и имеет место (22). Поэтому, в частности, можно считать r_0 выбранным так, чтобы внутри q_r, $r\leqslant r_0$, всегда имело место (17).

Пусть теперь $z_0\neq z$ — произвольная точка внутри зафиксированной ломаной q_{r_0}. Если $z_0\in\mathfrak{P}_0$, то имеет место (17); поэтому рассмотрим точку z_0 вне $\mathfrak{P}_0$, где по условию леммы функция $f(z)$ аналитична.

Пусть q_r — замкнутая ломаная, содержащая точку z внутри и имеющая столь малый диаметр, что точка $z_0\neq z$ лежит вне q_r, причем выполняется (22); по доказанному выше такая ломаная существует.

Очевидно, функция $\varphi(\zeta)=\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}$ непрерывна в замкнутой области $\overline{\delta}_r$, ограниченной ломаными q_{r_0} и q_r, и аналитична там всюду вне $\mathfrak{P}_0$. Так как на ломаных q_{r_0} и q_r

$$|\varphi(\zeta)|<L_6(\sigma),$$

а в точках множества $\mathfrak{P}_0$, попавших внутрь $\overline{\delta}_r$, имеет место (17), то в силу принципа максимума модуля для аналитических функций имеем во всех точках области $\overline{\delta}_r$

$$|\varphi(\zeta)|<L'=\max[L_6(\sigma),\ L]$$

и, в частности,

$$\left|\frac{f(z_0)-f(z)}{z_0-z}\right|<L'.$$

В силу произвольности точки z_0, $z_0 \neq z$, взятой внутри q_r, отсюда и следует (15).

Лемма 16 доказана.

Совершенно аналогично, почти не изменяя предыдущих рассуждений, можно получить следующее предложение:

Лемма 17. *Если в условиях леммы* 14 *функция* $\varphi(w)$ *является аналитической всюду вне множества* $\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{D}_1$, *то почти всюду на указанной там порции* $\mathfrak{P}_1' \subset \mathfrak{P}_1$ *она имеет полный дифференциал.*

В связи с леммой 16 докажем еще одно утверждение.

Лемма 18. *Пусть непрерывная в области* $\mathfrak{D}$ *функция* $f(z)$ *является аналитической всюду вне совершенного множества* $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$. *Пусть множество* $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$ — такое, что $\operatorname{Mes}\mathfrak{Q} = \operatorname{Mes}\mathfrak{P}$ и

1) *в каждой точке* $z \in \mathfrak{Q}$ *функция* $f(z)$ *имеет дифференциал относительно* $\mathfrak{P}$;

2) *из каждой точки* $z \in \mathfrak{Q}$ *исходят два луча* $t_1(z)$, $t_2(z)$, *расположенные на различных прямых, причем*

$$\varlimsup_{h\to 0}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|<\infty,$$

где $z+h \in t_i(z)$, $i=1, 2$.

Тогда почти всюду на $\mathfrak{P}$ *функция* $f(z)$ *обладает (обычным) полным дифференциалом.*

Доказательство. Для доказательства в силу теоремы Степанова нужно показать, что почти для всех точек $z \in \mathfrak{P}$ имеет место соотношение

$$\varlimsup_{\Delta_z\to 0}\left|\frac{\Delta f}{\Delta z}\right|<\infty. \tag{*}$$

Отметим прежде всего, что для произвольной непрерывной функции $f(z)$ множество $\mathfrak{S}$ всех точек области $\mathfrak{D}$, в которых выполняется (*), является измеримым, так как $\mathfrak{S}=\bigcup\limits_n \mathfrak{S}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, где

$$\mathfrak{S}_n=\underset{z}{\mathfrak{D}}\left\{\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|\leqslant n;\quad |h|<\frac{1}{n}\right\}$$

являются замкнутыми множествами (что доказывается, как и в главе 1, § 2). Поэтому измеримым является и дополнительное множество $\mathfrak{E} = \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{S}$.

Если утверждение нашей леммы неверно, то $\operatorname{Mes} \mathfrak{E} > 0$ и, очевидно, $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}$; выберем совершенное множество $\mathfrak{P}' < \mathfrak{E}$, каждая порция которого имеет положительную плоскую меру. Очевидно, можно считать, что $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{Q}$. По построению, для любой точки $z \in \mathfrak{P}'$ найдется последовательность точек $\zeta_n(z) \to z$ $(n = 1, 2, \ldots)$, для которых

$$\left| \frac{f(\zeta_n) - f(z)}{\zeta_n - z} \right| \to \infty \quad (n \to \infty). \qquad (**)$$

На основании леммы 12 находим порцию $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}'$, из каждой точки которой исходят два луча $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2)$, обладающих указанными в ней свойствами; в силу выбора множества $\mathfrak{P}'$ имеем

$$\operatorname{Mes} \mathfrak{P}_0 > 0.$$

Взяв теперь произвольную точку плотности $z \in \mathfrak{P}_0$, в которой $f(z)$ имеет дифференциал относительно всего множества $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{P}_0$, и повторяя доказательство леммы 16, как и там, придем к неравенству

$$\overline{\lim_{z' \to z}} \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| < \infty,$$

которое противоречит нашему предположению (**).

Лемма 18 доказана.

Отметим еще, что леммы 16, 17, 18 верны и в том случае, если предположить, что рассматриваемые в них функции осуществляют открытое (в частности, однолистное) отображение соответствующей области, и даже с усилением; именно, в условиях теорем 17, 18 можно показать, что они дифференцируемы не только почти всюду в некоторой подобласти, но и почти всюду по всей первоначальной области; фактически это утверждение доказано уже Д. Е. Меньшовым [55] и для наших дальнейших целей было бы достаточно.

Теперь докажем сформулированные в начале этого параграфа теоремы 4′ и 5.

Доказательство теорем 4′ и 5.

1) Предположим, что теорема 4′ неверна. Тогда найдется непустое совершенное множество $\mathfrak{P}$ в области $\mathfrak{D}$ такое, что

ни в одной точке $\mathfrak{P}$ функция $f(z)$ не является аналитической; в то же время в каждой точке дополнения $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ эта функция аналитична.

Из условий теоремы следует, что в точках $\mathfrak{P}$ имеет место свойство K'', исключая не более чем счетное множество, которое, следовательно, первой категории на $\mathfrak{P}$. Поэтому, применяя леммы 13 и 16, находим круг $\overline{\mathfrak{D}}_0 \subset \mathfrak{D}$, содержащий порцию $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}$ и такой, что

а$_1$) $f(z)$ аналитична в $\mathfrak{D}_0 \setminus \mathfrak{P}_0$;

б$_1$) $|f(z_2) - f(z_1)| < L\,|z_2 - z_1|$ для любых точек z_1, $z_2 \in \mathfrak{P}_0$ (L — постоянная);

в$_1$) $f(z)$ почти всюду в $\mathfrak{D}_0$ дифференцируема.

Но так как отображение $w = f(z)$ является однолистным и прямым, то в силу леммы 8

в$_1'$) $f(z)$ почти всюду в $\mathfrak{D}_0$ моногенна.

Наконец, как и в теореме 3$'$, докажем, что

г$_1$) производная $f'(z)$ суммируема в $\mathfrak{D}_0$.

В силу леммы 11 функция $f(z)$ с перечисленными свойствами должна быть аналитической всюду в круге $\mathfrak{D}_0$ и, в частности, в точках $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}$; что противоречит определению точек множества $\mathfrak{P}$; следовательно, множество $\mathfrak{P}$ должно быть пустым.

Тем самым утверждение теоремы 4$'$, а вместе с ней и теоремы 4, доказано.

2) Аналогично, предполагая, что неверна теорема 5, находим совершенное множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$ всех точек $\mathfrak{D}$, в которых функция $f(z)$ не является аналитической.

Из условий теоремы следует, что в точках $\mathfrak{P}$ выполнено свойство K''', исключая не более чем счетное множество. Поэтому, применяя леммы 15 и 16, найдем круг $\mathfrak{D}_0$, содержащий порцию $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}$, такой, что

а$_2$) $f(z)$ аналитична в $\mathfrak{D}_0 \setminus \mathfrak{P}_0$;

б$_2$) $|f(z_2) - f(z_1)| < L\,|z_2 - z_1|$ для любых точек z_1, $z_2 \in \mathfrak{P}_0$, лежащих на одной из прямых $\xi = \mathrm{const}$, $\eta = \mathrm{const}$; при этом в качестве направлений осей ξ, η косоугольной системы координат можно взять направления сторон вертикальных углов $V(z)$, о которых идет речь в лемме 15;

в$_2$) $f(z)$ почти всюду в $\mathfrak{D}_0$ дифференцируема.

В силу леммы 7 пункт в$_2$) можно заменить здесь таким:

в$_2'$) $f(z)$ почти всюду в $\mathfrak{D}_0$ моногенна.

С помощью рассуждений теоремы 3$'$ получим, наконец, что г$_2$) производная $f'(z)$ суммируема в $\mathfrak{D}_0$. Отметим лишь, что при доказательстве г$_2$) следует учесть, что почти во всех точках плотности $z_1 \in \mathfrak{P}_0$, где производная $f'(z)$ существует, она ограничена по модулю числом L, так как в силу леммы 15 для любой точки $z_2 \in \mathfrak{P}_0$ вертикальных углов $V(z_1)$ также имеет место б$_2$).

Из леммы 11$'$ следует тогда, что $f(z)$ является аналитической всюду в $\mathfrak{D}_0 \supset \mathfrak{P}_0$, что, как и выше, противоречиво.

Теорема 5 доказана.

Следует заметить, что теорему 4 нельзя считать обобщением теоремы 3 в полном смысле слова, так как определение свойства K'' требует конечности растяжения в точке (и этим мы существенно пользовались выше). Не известно, можно ли в условиях теоремы 4 допускать и бесконечные растяжения; что же касается теоремы 5, то можно доказать ее, допуская также и бесконечные растяжения, если одновременно потребовать существования одного и того же предела

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z}, \qquad z + \Delta z \in t_1(z), \quad t_2(z).$$

Мы не будем приводить этого доказательства, но из главы 4, § 5 будет достаточно ясно, как его получить.

§ 3. Теорема Д. Е. Меньшова об отображениях, переводящих бесконечно малые круги в бесконечно малые круги

Рассмотрим некоторое непрерывное и однолистное отображение $w = f(z)$ области $\mathfrak{D}$ плоскости z на область $\mathfrak{D}_1$ плоскости w. Для произвольной точки $z_0 \in \mathfrak{D}$ возьмем окружность $C(z_0, r)$: $|z - z_0| = r$ и положим

$$H(z_0, r) = \frac{\max\limits_{|z' - z_0| = r} |f(z') - f(z_0)|}{\min\limits_{|z'' - z_0| = r} |f(z'') - f(z_0)|}.$$

В силу однолистности функции $f(z)$ величина $H(z_0, r)$ конечна; геометрический смысл ее заключается в следующем.

Обозначим через $C_1(z_0, r) \subset \mathfrak{D}_1$ образ окружности $C(z_0, r)$ при отображении $w = f(z)$; из однолистности этого отображения следует, что $C_1(z_0, r)$ есть замкнутая жорданова кривая, содержащая точку $w_0 = f(z_0)$ внутри. Если R' и R'' суть соответственно наибольшее и наименьшее расстояния w_0 до точек кривой $C_1(z_0, r)$, то

$$H(z_0, r) = \frac{R'}{R''}.$$

Предположим теперь, что при $r \to 0$ величина $H(z_0, r) \to 1$, тогда и $\frac{R'}{R''} \to 1$. Геометрически это означает, что с уменьшением r до нуля кривая $C_1(z_0, r)$ может быть заключена в круговое кольцо с центром в $w_0 = f(z_0)$, ширина которого есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с внутренним (или внешним) его радиусом.

Это оправдывает введение следующего понятия:

Определение 6. Непрерывная и однолистная функция $f(z)$ *отображает бесконечно малый круг*

$$C(z_0, r): |z - z_0| = r$$

в бесконечно малый круг[1], если

$$\lim_{r \to 0} H(z_0\ r) = 1. \tag{23}$$

Очевидно, соотношение (23) выполнено, если существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|,$$

не равный нулю. Обратное не всегда верно: (23) может выполняться даже тогда, когда множество моногенности $\mathfrak{M}_{z_0}$ функции $f(z)$ есть полная плоскость.

Поэтому следующая теорема Д. Е. Меньшова является существенным обобщением результата Г. Бора (см. [27] и введение).

Теорема 6. *Если непрерывная функция $w = f(z)$ однолистна в области $\mathfrak{D}$ и для каждой точки $z \in \mathfrak{D}$, исключая не более чем счетное их множество, отображает бесконечно малый круг с центром в этой*

---

[1] Некоторая неточность в применении слова «круг» (вместо «окружность») вызвана установившейся уже традицией, и к существенным недоразумениям это не приводит.

точке в бесконечно малый круг, то либо функция $f(z)$, *либо ей сопряженная* $\overline{f(z)}$ *является аналитической всюду в* $\mathfrak{D}$.

Как и в предыдущих параграфах, убеждаемся, что достаточно будет доказать следующую теорему, которую сформулируем несколько короче:

Теорема 6′. *Если непрерывная и однолистная функция* $w=f(z)$ *осуществляет прямое отображение области* $\mathfrak{D}$ *и в каждой точке* $z\in\mathfrak{D}$, *исключая не более чем счетное их множество, имеет место* (23), *то* $f(z)$ *является аналитической функцией в* $\mathfrak{D}$.

Мы приведем доказательство этой теоремы, в основном сохраняя рассуждения Д. Е. Меньшова, а также порядок следования его лемм.

Лемма 19. *Пусть* $f(z)$ — *функция, непрерывная и однолистная в области* $\mathfrak{D}$, *и* $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{D}$ — *совершенное множество. Если в каждой точке* z *множества* $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{P}$ *не первой категории на* $\mathfrak{P}$ *имеет место* (23), *то для каждого* $\varepsilon>0$ *найдется круг* $\overline{\mathfrak{D}}_0\subset\mathfrak{D}$, *содержащий некоторую порцию* $\mathfrak{P}_0\subset\mathfrak{P}$, *и положительное число* σ, *такие, что*

$$H(z, r)\leqslant 1+\varepsilon, \tag{24}$$

для всех $z\in\mathfrak{P}_0$ *и всех* r, $0<r\leqslant\sigma$.

Доказательство. Для данного $\varepsilon>0$ обозначим через $\mathfrak{E}_n$ множество точек z, для которых имеет место (24) для всех $0<r\leqslant\frac{1}{n}$; тогда в силу (23)

$$\mathfrak{N}=\bigcup_n(\mathfrak{E}_n\bigcap\mathfrak{N})\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Покажем, что каждое множество $\mathfrak{E}_n$ замкнуто в $\mathfrak{D}$.

В самом деле, пусть $z_k\in\mathfrak{E}_n$ и $z_k\to z_0\in\mathfrak{D}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. Возьмем на окружности $C(z_0, r)$, $0<r<\frac{1}{n}$, две произвольные точки z', z''; на окружностях $C(z_k, r)$ $(k=1,\ 2,\ldots)$ того же радиуса r выберем по две точки z'_k, z''_k так, чтобы $z'_k\to z'$ и $z''_k\to z''$. Тогда

$$\left|\frac{f(z'_k)-f(z_k)}{f(z''_k)-f(z_k)}\right|\leqslant 1+\varepsilon\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots).$$

В силу однолистности функции $f(z)$ имеем $f(z'') \neq f(z_0)$; поэтому в предыдущих неравенствах возможен предельный переход при $k \to \infty$, и мы получаем

$$\left| \frac{f(z') - f(z_0)}{f(z'') - f(z_0)} \right| \leqslant 1 + \varepsilon,$$

т. е. $H(z_0, r) \leqslant 1 + \varepsilon$, что и требовалось.

Так как $\mathfrak{N} = \bigcup\limits_n (\mathfrak{E}_n \bigcap \mathfrak{N})$ и $\mathfrak{N}$ — не первой категории на $\mathfrak{P}$, то найдется порция $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}_0$ ($\overline{\mathfrak{D}}_0 \subset \mathfrak{D}$ — некоторый круг), на которой одно их множеств $\mathfrak{E}_n$ всюду плотно, но так как $\mathfrak{E}_n$ замкнуто в $\mathfrak{D}$, то $\mathfrak{P}_0$ внутри круга $\mathfrak{D}_0$ просто совпадает с $\mathfrak{E}_n$. Выбрав теперь $\sigma = \frac{1}{n}$, мы завершаем доказательство леммы 19.

Лемма 20. *В условиях теоремы* 6′ *функция* $f(z)$ *моногенна почти всюду в области* $\mathfrak{D}$.

Доказательство. Покажем сначала, что $f(z)$ почти всюду в $\mathfrak{D}$ дифференцируема; для этого в силу теоремы В. В. Степанова (см. приложение, § 3) нужно убедиться, что почти всюду в $\mathfrak{D}$

$$\varlimsup_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| < \infty. \tag{25}$$

На стр. 65 мы показали, что множество $\mathfrak{S}$ всех точек $z \in \mathfrak{D}$, в которых имеет место (25), измеримо. Поэтому измеримым является и дополнительное множество $\mathfrak{E} = \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{S}$.

Предположим, что наше утверждение неверно и $\operatorname{Mes} \mathfrak{E} > 0$. Тогда можно указать круг $\mathfrak{d}$, $\overline{\mathfrak{d}} \subset \mathfrak{D}$, для которого множество $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{d}$ имеет также положительную меру

$$\operatorname{Mes} \mathfrak{E}_0 > 0.$$

Ясно, что область $\mathfrak{d}_1 = f(\mathfrak{d})$ в плоскости w ограничена и, следовательно, имеет конечную площадь. Идея приводимого ниже доказательства состоит в том, чтобы получить для этой площади сколь угодно большое значение, опираясь на подходящее покрытие $\mathfrak{E}_0$ кругами и теорему Витали; полученное противоречие и покажет, что (25) выполнено почти всюду в $\mathfrak{D}$ и $f(z)$ почти всюду дифференцируема.

Вычитая, если нужно, из $\mathfrak{E}_0$ точки исключительного не более чем счетного множества, указанного в теореме 6′, будем считать, что (23) имеет место в каждой точке $\mathfrak{E}_0$.

Пусть A — сколь угодно большое число. Из нашего предположения следует, что для любой точки $z \in \mathfrak{E}_0$ найдется последовательность точек $\zeta_n = \zeta_n(z) \in \mathfrak{b}$, для которых

$$\left| \frac{f(\zeta_n) - f(z)}{\zeta_n - z} \right| > A, \tag{26}$$

причем $r_n(z) = |\zeta_n - z| \to 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Далее, в силу (23) найдется $r(z) > 0$ такое, что при $r \leqslant r(z)$

$$H(z, r) < 2; \tag{27}$$

очевидно, можно считать, что для всех точек $\zeta_n(z)$ числа $r_n(z) \leqslant r(z)$.

Через каждую точку $\zeta_n(z)$ проведем окружность $C^{(n)}(z) = C(z, r_n(z))$, ограничивающую круг $\mathfrak{K}^{(n)}(z)$. Пусть $C_1^{(n)}(z)$, $\mathfrak{K}_1^{(n)}(z)$ — их образы. В силу (27) радиус R_n' описанного вокруг кривой $C_1^{(n)}$ и радиус R_n'' вписанного в нее круга с центром в $f(z)$ удовлетворяют условию

$$\frac{R_n'}{R_n''} < 2,$$

а в силу (26)

$$R_n'' > \frac{A}{2} r_n.$$

Отсюда следует, что площадь области $\mathfrak{K}_1^{(n)}$ будет

$$\operatorname{Mes} \mathfrak{K}_1^{(n)} > \frac{\pi}{4} A^2 r_n^2(z). \tag{28}$$

Так как замкнутые круги $\overline{\mathfrak{K}^{(n)}(z)}$, $z \in \mathfrak{E}_0$, очевидно, образуют покрытие Витали множества $\mathfrak{E}_0$, то из них можно выбрать конечное число попарно не пересекающихся кругов $\overline{\mathfrak{K}^l} = \overline{\mathfrak{K}^{(n_l)}(z)}$ $(l = 1, 2, \ldots, s)$, для которых

$$\sum_l \operatorname{Mes} \mathfrak{K}^l = \pi \sum_l r_{n_l}^2 > \frac{1}{2} \operatorname{Mes} \mathfrak{E}_0. \tag{29}$$

В силу однолистности отображения $w = f(z)$ области $\mathfrak{K}_1^l = f(\mathfrak{K}^l)$ также попарно не пересекаются, поэтому $\operatorname{Mes} \mathfrak{b}_1 =$

$= \mathrm{Mes}\, f(\mathfrak{d}) > \sum \mathrm{Mes}\, \mathfrak{K}_1^l$; теперь в силу (28) и (29) получаем

$$\mathrm{Mes}\, \mathfrak{d}_1 > \frac{A^2}{8} \mathrm{Mes}\, \mathfrak{E}_0,$$

что при любом A, очевидно, невозможно.

Итак, мы показали, что функция $f(z)$ почти всюду в $\mathfrak{D}$ имеет полный дифференциал. Покажем теперь, что она моногенна почти всюду.

Пусть в точке $z \in \mathfrak{D}$ функция $f(z)$ дифференцируема. Из условия $\lim\limits_{r \to 0} H(z, r) = 1$ и определения величины $H(z, r)$ легко следует, что все производные числа $f(z)$ в точке z равны по модулю и, следовательно, отображение $w = f(z)$ обладает постоянным растяжением в этой точке. Так как это отображение является прямым, то в силу леммы 8 в точке z функция $f(z)$ моногенна.

Лемма 20 доказана.

Лемма 21. *Если непрерывная и однолистная функция $f(z)$ моногенна почти всюду в области $\mathfrak{D}$, то ее производная $f'(z)$ суммируема с квадратом внутри $\mathfrak{D}$, т. е. для любой области $\mathfrak{d}$, $\overline{\mathfrak{d}} \subset \mathfrak{D}$,*

$$\iint\limits_{\mathfrak{d}} |f'(z)|^2 \, dx \, dy < \infty. \tag{30}$$

Доказательство. В силу леммы 20 для множества $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{d}$, где существует конечная производная $f'(z)$, имеем $\mathrm{Mes}\, \mathfrak{Q} = \mathrm{Mes}\, \mathfrak{d}$, поэтому (30) равносильно тому, что

$$\iint\limits_{\mathfrak{Q}} |f'(z)|^2 \, dx \, dy < \infty. \tag{31}$$

Пусть $\mathfrak{Q}_n$ — часть $\mathfrak{Q}$, где

$$n - 1 < |f'(z)| \leqslant n;$$

тогда $\mathfrak{Q} = \bigcup\limits_n \mathfrak{Q}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и так как

$$\iint\limits_{\mathfrak{Q}_n} |f'(z)|^2 \, dx \, dy \leqslant n^2 \, \mathrm{Mes}\, \mathfrak{Q}_n,$$

то (31) будет доказано, если мы покажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \,\mathrm{Mes}\, \mathfrak{Q}_n < \infty. \tag{32}$$

Зафиксируем произвольно большое целое n_0 и для $k = 1, 2, \ldots, n_0$ рассмотрим такие попарно не пересекающиеся совершенные множества $\mathfrak{P}_k \subset \mathfrak{Q}_k$, что

$$\mathrm{Mes}\, \mathfrak{P}_k > \frac{1}{2} \mathrm{Mes}\, \mathfrak{Q}_k.$$

Эти множества отстоят на положительном расстоянии друг от друга и от границы области $\mathfrak{D}$, поэтому их можно заключить в попарно не пересекающиеся открытые множества $\mathfrak{G}_k \subset \mathfrak{D}$. Тогда для произвольной точки $z \in \mathfrak{P}_k$ найдется последовательность точек $\zeta_n = \zeta_n(z) \in \mathfrak{G}_k$ таких, что

$$\left| \frac{f(\zeta_n) - f(z)}{\zeta_n - z} \right| > k - 1, \quad |\zeta_n - z| \to 0.$$

Проводя окружности $C^{(n)}(z)$, проходящие через ζ_n, заключаем, как при доказательстве леммы 20, что при фиксированном k можно выбрать конечное число замкнутых попарно не пересекающихся кругов $\mathfrak{K}^{(lk)} = \overline{\mathfrak{K}^{(n_l)}(z_l)}$ $(l = 1, 2, \ldots, s_k;$ $z_l \in \mathfrak{P}_k)$, таких, что их образы $\mathfrak{K}_1^{(lk)}$ также попарно не пересекаются и имеют площадь

$$\sum_{l=1}^{s_k} \mathrm{Mes}\, K_1^{(ik'} > \frac{(k-1)^2}{8} \mathrm{Mes}\, \mathfrak{P}_k > \frac{(k-1)^2}{16} \mathrm{Mes}\, \mathfrak{Q}_k.$$

Так как открытые множества $\mathfrak{Q}_k \supset \mathfrak{P}_k$ не пересекаются, то из предыдущих неравенств получим $(k = 1, 2, \ldots, n_0)$:

$$\mathrm{Mes}\, \mathfrak{D}_1 > \sum_{k=1}^{n_0} \sum_{l=1}^{s_k} \mathrm{Mes}\, \mathfrak{K}_1^{(lk)} > \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{n_0} (k-1)^2 \,\mathrm{Mes}\, \mathfrak{Q}_k,$$

откуда следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^2 \mathrm{Mes}\, \mathfrak{Q}_k,$$

а с ним и ряда (32).

Лемма 21 доказана.

Лемма 22. *Пусть непрерывная и однолистная функция $f(z)$ является аналитической всюду в круге $\mathfrak{D}_0$ радиуса $\sigma > 0$, исключая, возможно, точки совершенного множества $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{D}_0$. Если в каждой точке $z \in \mathfrak{P}_0$*

$$H(z, r) < 2$$

для всех r, $0 < r \leqslant \sigma$, то функция $f(z)$ обладает N-свойством[1]) *почти на всех сечениях круга $\mathfrak{D}_0$ прямыми, параллельными осям координат.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лемму для произвольного прямоугольника в $\mathfrak{D}_0$ со сторонами, параллельными осям координат.

Возьмем прямоугольник $\mathfrak{R}[x_1, x_2; y_1, y_2] \subset \mathfrak{D}_0$ и докажем, что имеет место N-свойство на прямолинейных сегментах $\overline{z_1(y) z_2(y)}$, соединяющих точки $z_1(y) = x_1 + iy$, $z_2(y) = x_2 + iy$, для почти всех $y \in [y_1, y_2]$.

Предположим противное; тогда для каждого значения y некоторого множества $\mathfrak{e} \subset [y_1, y_2]$ положительной внешней меры $\mathrm{mes}^* \mathfrak{e} > 0$ существует на сегменте $\overline{z_1(y) z_2(y)}$ совершенное множество $\pi(y)$ меры нуль, образ которого $q(y)$ имеет положительную длину; так как вне $\mathfrak{P}_0$ функция $f(z)$ аналитична и, следовательно, обладает N-свойством, то можно считать, что $\pi(y) \subset \mathfrak{P}_0$, $y \in \mathfrak{e}$.

Нетрудно убедиться, что найдутся такие $\lambda > 0$ и $\mathfrak{e}' \subset \mathfrak{e}$, что

$$\mathrm{mes}^* \mathfrak{e}' > 0,$$

$$\text{длина } q(y) > \lambda$$

для всех $y \in \mathfrak{e}'$.

Идея дальнейшего доказательства состоит в том, чтобы, покрывая «достаточно большую» часть множества $\bigcup\limits_{y \in \mathfrak{e}'} \pi(y)$ попарно непересекающимися кругами $C(z, r)$ и оценивая площадь совокупности их образов, получить для последней сколь угодно большое значение, что ведет к противоречию.

Зафиксируем произвольно большое число A и каждое множество $\pi(y) \subset \overline{z_1(y) z_2(y)}$, $y \in \mathfrak{e}'$, заключим в конечное число $p(y)$ непересекающихся сегментов $\delta^{(k)}(y)$, $1 \leqslant k \leqslant p(y)$,

---

[1]) См. приложение, § 4.

одинаковой (и сколь угодно малой) длины $\delta(y)$ так, чтобы

$$p(y)\,\delta(y) = p\delta(y) < \frac{1}{A}. \tag{33}$$

Занумеровав сегменты $\delta^{(k)}(y)$, например, в направлении оси Ox, обозначим через $\pi'(y)$ и $\pi''(y)$ части множества $\pi(y)$, расположенные соответственно в четных и нечетных сегментах $\delta^{(k)}(y)$. Образ $q_0(y)$ по крайней мере одной из этих частей имеет длину, большую $\frac{\lambda}{2}$; соответствующую часть $\pi(y)$ обозначим через $\pi_0(y)$, а сегменты — через $\delta_0^{(s)}(y)$, $1 \leqslant s \leqslant p_0(y)$. Из (33) следует, что

$$p_0(y)\,\delta(y) = p_0\delta(y) < \frac{1}{A}. \tag{34}$$

Внутри каждого сегмента $\delta_0^{(s)}(y)$ возьмем произвольную точку $z^{(s)}(y) \in \pi(y)$ и рассмотрим окружности $C\left(z^{(s)}, \delta\right) = C^{(s)}$ радиуса $\delta(y)$; так как по построению расстояние между сегментами $\delta_0^{(s)}(y)$ всегда не меньше $\delta(y)$, то эти окружности не пересекаются. Далее, $\delta(y)$ можно предположить настолько малым, чтобы все окружности $C(z^{(s)}, \delta)$ лежали внутри $\mathfrak{D}_0$.

Пусть $C_1\left(z^{(s)}, \delta\right) = C_1^{(s)}$ — образ соответствующей окружности, а $\mathfrak{K}_1\left(z^{(s)}, \delta\right) = \mathfrak{K}_1^{(s)}$ — область, ограниченная кривой $C_1^{(s)}$. Ясно, что эти области содержат $q_0(y)$. Так как $\delta < \sigma$ и $z^{(s)} \in \mathfrak{P}_0$, то по условию

$$H(z^{(s)}, \delta) < 2.$$

Поэтому радиус R_s' описанного вокруг кривой $C_1^{(s)}$ и радиус R_s'' вписанного в нее круга с центром в $f(z^{(s)})$ удовлетворяет условию

$$R_s' < 2R_s''.$$

Так как описанные окружности охватывают множество $q_0(y)$ длины $> \frac{\lambda}{2}$ и так как с уменьшением δ диаметры их также уменьшаются, то $\delta(y)$ можно выбрать таким, чтобы для всех его значений, меньших выбранного, было

$$\sum_{s=1}^{p_0} 2\pi R_s' > \frac{\lambda}{2}.$$

Из предыдущего следует далее, что

$$\sum_{s=1}^{p_0} R_s'' > \frac{\lambda}{8\pi}. \tag{35}$$

Оценим теперь площадь $S(y)$ совокупности областей $\mathfrak{K}_1^{(s)}$; так как они не перекрываются и содержат вписанные круги с радиусами R_s'', то

$$S(y) = \sum_{s=1}^{p_0} \operatorname{Mes} \mathfrak{K}_1^{(s)} \geqslant \pi \sum_{s=1}^{p_0} R_s''^2.$$

По известному неравенству $\left(\sum_k \alpha_k \beta_k\right)^2 \leqslant \sum_k \alpha_k^2 \sum_k \beta_k^2$ найдем отсюда, учтя (34) и (35), что

$$S(y) \geqslant \frac{\pi}{p_0}\left(\sum_{s=1}^{p_0} R_s''\right)^2 \geqslant \frac{\lambda^2}{64\pi p_0} > \frac{\lambda^2}{64\pi} A\delta(y).$$

Для каждого $y \in \mathfrak{e}'$ рассмотрим на оси Oy сегменты $[y - \delta(y), y + \delta(y)]$; так как $\delta(y)$ произвольно мало, то указанные сегменты образуют покрытие Витали для множества $\mathfrak{e}'$, $\operatorname{mes}^* \mathfrak{e}' > 0$. Поэтому найдется такое конечное число сегментов $\Delta_j = [y_j - \delta(y_j), y_j + \delta(y_j)]$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$, один вне другого, таких, что

$$2\sum_{j=1}^{\nu} \delta(y_j) = \sum_j \operatorname{mes} \Delta_j > \frac{1}{2} \operatorname{mes}^* \mathfrak{e}'.$$

Рассматривая теперь покрытие множеств $\pi(y_j)$ указанными выше непересекающимися кругами, замечаем, что образы последних, $\mathfrak{K}_1^{(s)}(y_j)$, также лежат вне друг друга и последние неравенства дают оценку покрываемой ими площади

$$\sum_j S(y_j) > \frac{\lambda^2}{64\pi} A \sum_j \delta(y_j) > \frac{\lambda^2}{128\pi} A \operatorname{mes}^* \mathfrak{e}',$$

что при любом A, очевидно, невозможно.

Докажем теперь теорему 6'.

Доказательство теоремы 6'. Предположим, что теорема неверна. Тогда имеется совершенное множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$

точек, в которых $f(z)$ не является аналитической, причем в точках дополнения $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ она аналитична.

По лемме 19 находим круг $\mathfrak{D}_0$, содержащий порцию $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}$, и число $\sigma > 0$, для которых $H(z, r) < 2$ для всех $z \in \mathfrak{P}_0$ и $0 < r \leqslant \sigma$; очевидно, можно считать диаметр $\mathfrak{D}_0 < \sigma$, а расстояние $\mathfrak{D}_0$ до границы области $\mathfrak{D}$ — больше σ.

В силу доказанных лемм функция $f(z) = u + iv$ почти всюду в круге $\mathfrak{D}_0$ моногенна и имеет суммируемую (с квадратом) производную $f'(z)$; при этом в силу леммы 22 $f(z)$ обладает N-свойством почти на всех сечениях круга $\mathfrak{D}_0$, параллельных осям координат.

Из суммируемости $f'(z)$ следует суммируемость всех частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$. Возьмем внутри $\mathfrak{D}_0$ произвольный прямоугольник $\mathfrak{R}\,[x_1, x_2;\ y_1, y_2]$. По теореме Фубини

$$\int\limits_{\mathfrak{R}}\int \frac{\partial u}{\partial x}\,\partial x\,\partial y = \int\limits_{y_1}^{y_2} \partial y \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx,$$

причем внутренний интеграл существует почти для всех $y \in [y_1, y_2]$; с другой стороны, функция u почти для всех $y \in [y_1, y_2]$ обладает N-свойством. Отсюда следует, что функция $u(x, \eta)$ почти для всех $\eta \in [y_1, y_2]$ является абсолютно непрерывной по x (см. приложение, § 4); следовательно,

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx = u(x_2, y) - u(x_1, y),$$

откуда, как и в лемме 11,

$$\int\limits_{\mathfrak{R}}\int \frac{\partial u}{\partial x}\,\partial x\,\partial y = \int\limits_{C} u\,dy,$$

где C — контур прямоугольника $\mathfrak{R}$.

Поступая аналогично с остальными интегралами, как и в лемме 11, окончательно получим

$$\int\limits_{C} f(z)\,dz = 0.$$

Из произвольности прямоугольника $\mathfrak{R}$ и теоремы Морера следует аналитичность функции $f(z)$ всюду внутри круга $\mathfrak{D}_0$

и, в частности, в точках $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}$, что противоречит определению множества $\mathfrak{P}$.

Теорема 6$'$, а вместе и теорема 6, доказана.

Заметим, что условия теорем 3, 4 и 6, а потому и сами эти теоремы, являются попарно независимыми; более того, легко построить примеры однолистных функций, для которых в некоторой точке выполнено одно условие и не выполнены два других [1]).

Все теоремы этого параграфа можно объединить следующим образом:

Теорема 7. *Пусть непрерывное и однолистное отображение* $w = f(z)$ *области* $\mathfrak{D}$ *является прямым и в каждой точке* $z \in \mathfrak{D}$, *исключая не более чем счетное их множество, выполнено одно из свойств*:

1) *функция* $f(z)$ *обладает постоянным и конечным растяжением* [2]);

2) *свойство* K'';

3) $\lim\limits_{r \to 0} H(z, r) = 1$;

4) *свойство* K''';

тогда функция $f(z)$ или $\overline{f(z)}$ *является аналитической всюду в* $\mathfrak{D}$.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$ множества точек z, в которых имеют место соответственно свойства 1) — 4).

Предполагая теорему неверной, как обычно, находим совершенное множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$ точек неаналитичности $f(z)$, вне которого она аналитична. Найдется такая порция $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}_0$ ($\overline{\mathfrak{D}}_0 \subset \mathfrak{D}$ — круг), на которой одно из множеств $\mathfrak{E}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ — не первой категории; но тогда, применяя проведенные выше для соответствующего случая рассуждения и учитывая леммы 7, 8 и 20, придем к тому, что $f(z)$ должна быть аналитической и в точках $\mathfrak{P}_0$, что приводит к противоречию с определением множества $\mathfrak{P}$.

Теорема 7 доказана.

Возвращаясь к свойствам 1) — 4) в ее формулировке, можно заметить одну особенность, присущую каждому из

---

[1]) Но если в точке z выполнены свойство K'' и $H(z, r) \to 1$, то $f(z)$ обладает постоянным растяжением в этой точке.

[2]) Не известно, можно ли и здесь допускать бесконечные растяжения.

них: если в некоторой точке имеет место одно из этих свойств, причем функция $f(z)$ в той же точке имеет полный дифференциал, то она моногенна в этой точке (по крайней мере, если отображение $w=f(z)$ — прямое и однолистное). Теорема 7 показывает, что выполнение в области $\mathfrak{D}$ указанных свойств самих по себе — без предположения дифференцируемости $f(z)$ — уже достаточно для моногенности функции $f(z)$ всюду в $\mathfrak{D}$, т. е. для ее аналитичности.

Обозначим через μ такое свойство функции $f(z)$ в точке области, которое при условии существования полного дифференциала у $f(z)$ в той же точке обеспечивает ее моногенность. Имея в виду полученный выше результат, естественно было бы сформулировать следующее весьма общее утверждение: если $w=f(z)$ есть непрерывное, однолистное и прямое отображение области $\mathfrak{D}$, то выполнение свойства μ в каждой ее точке (за исключением конечного или счетного их множества), без предположения дифференцируемости $f(z)$, достаточно для аналитичности функции $f(z)$ в $\mathfrak{D}$ [см. [56]).

Но в общем случае это утверждение оказывается неверным. Прежде чем привести соответствующий пример, заметим, что если в определении свойств K', K'', K''' заменить сплошные лучи $t_i=(z)$ ($i=1, 2$ или $1, 2, 3$) последовательностями их точек, сходящихся к z, то эти свойства останутся свойствами типа μ.

Рассмотрим теперь пример непрерывной на оси Ox функции $\varphi(x)$, построенной А. Д. Мышкисом (см. [39], а также § 1 главы 1), которая в каждой точке x обладает всевозможными производными числами. Для каждого x рассмотрим последовательность точек $\xi_n(x)\rightarrow x$ $(n=1, 2, \ldots)$ таких, что

$$\frac{\varphi(\xi_n)-\varphi(x)}{\xi_n-x}\rightarrow 0 \qquad (n\rightarrow\infty).$$

Положим

$$f(z)=x+i[y-\varphi(x)]=z-i\varphi(x);$$

функция $f(z)$ непрерывна и однолистна в плоскости z.

Для каждой точки $z_0=x_0+iy_0$ возьмем систему прямых $x=\xi_n(x_0)$ вместе с предельной прямой $x=x_0$; легко видеть, что в точке z_0 функция $f(z)$ моногенна относительно множества точек этих прямых и $f'(z_0)=1$: это явно свойство типа μ. Так как указанное свойство имеет место в каждой точке плоскости z, то мы находимся в условиях сформулированного выше общего утверждения; тем не менее $f(z)$ не только не аналитична, но в каждой точке плоскости имеет всевозможные производные числа (т. е. все множества моногенности $\mathfrak{M}_z$ суть полные плоскости ζ).

Приведенный нами пример показывает также, что в определении свойств K', K'', K''' существенным является приближение к точке z по *сплошным* линиям.

Отметим все же, что если в этих определениях брать лучи одинаковых направлений и на параллельных лучах — *конгруэнтные* последовательности точек (относительно которых и определяются K', K'', K'''), то в области *обязательно найдутся точки аналитичности соответствующей функции* $f(z)$ [1]; но не известно, будет ли такая функция аналитической *всюду* в области.

---

[1] Доказательство этого факта мы приводить не будем, так как оно незначительно отличается от тех, которые приведены в главе 4.

ГЛАВА 3

ВНУТРЕННИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Лемма С. Стоилова

Следуя С. Стоилову [37] [1], назовем непрерывное отображение $w = f(z)$ области $\mathfrak{D}$ *внутренним*, если

1) ни один континуум области не переводится при этом отображении в точку;

2) образ открытого на плоскости z множества есть множество, открытое на плоскости w.

С. Стоилову принадлежит следующий основной результат: *всякое внутреннее отображение можно представить в виде суперпозиции топологического и последующего аналитического отображения.* Справедливо, очевидно, и обратное. Из этого результата следует, что точки многолистности внутреннего отображения расположены в области изолированно и что, с точностью до топологической деформации, отображение в окрестности таких точек ведет себя, как степенная функция. Тот же результат показывает, что следующее определение внутреннего отображения равносильно предыдущему (см., например, [43]): *существует такая триангуляция области* $\mathfrak{D}$, *что непрерывное отображение* $w = f(z)$ *гомеоморфно в каждом треугольнике, а также в окрестности каждой его граничной точки, исключая, быть может, вершины треугольника.*

Приведем еще одно утверждение, которое также принадлежит С. Стоилову и названо им *леммой о непрерывном продолжении внутреннего отображения.*

---

[1] См. также С. Стоилов, Теория функций комплексного переменного, т. 1 и 2, М, 1962.

Лемма Стоилова. *Пусть в области* $\mathfrak{D}$ *задано непрерывное отображение* $w = f(z)$ *со свойствами*:

1. *Существует замкнутое всюду разрывное в* $\mathfrak{D}$ *множество* $\mathfrak{P}$, *такое, что в области* $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ *отображение* $w = f(z)$ *является внутренним.*

2. *Образ* $\mathfrak{P}_1 = f(\mathfrak{P})$ *множества* $\mathfrak{P}$ *есть* (*замкнутое*) *всюду разрывное множество на плоскости* w.

Тогда отображение $w = f(z)$ *является внутренним в области* $\mathfrak{D}$.

Доказательство. Из условий леммы сразу следует, что никакой континуум в области $\mathfrak{D}$ не сводится в точку при отображении $w = f(z)$.

Следовательно, если это отображение не является внутренним, то найдется точка $z_0 \in \mathfrak{P}$ и замкнутая область $\overline{\delta} \subset \mathfrak{D}$, содержащая точку z_0 внутри, такие, что $w_0 = f(z_0)$ есть граничная точка континуума $\overline{\delta}_1 = f(\overline{\delta})$. Рассмотрим полный прообраз $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{D}$ множества $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{Q} = f^{-1}(\mathfrak{P}_1)$. Легко видеть, что в наших условиях $\mathfrak{Q}$ замкнуто и всюду разрывно в области $\mathfrak{D}$. Поэтому внутри области δ можно определить жорданову область $\mathfrak{d}$, содержащую z_0 внутри, граница λ которой не пересекает множества $\mathfrak{Q}$. Для континуума $\overline{\mathfrak{d}}_1 = f(\overline{\mathfrak{d}})$ точка w_0 является также граничной.

Так как множество $\mathfrak{P}_1$ разрывно, а $\overline{\mathfrak{d}}_1$ — континуум, то каждая порция его границы должна содержать точки, расположенные вне $\mathfrak{P}_1$. Тогда найдется последовательность точек $\{w_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, лежащих вне $\mathfrak{P}_1$, принадлежащих границе множества $\overline{\mathfrak{d}}_1$ и таких, что

$$\lim_{n \to \infty} w_n = w_0. \tag{1}$$

Так как $w_n \in \overline{\mathfrak{d}}_1$, то в $\overline{\mathfrak{d}}$ существует последовательность соответствующих им точек $\{z_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, для которых

$$w_n = f(z_n). \tag{2}$$

Эти z_n расположены вне $\mathfrak{Q}$, а потому и вне $\mathfrak{P}$. Но в области $\mathfrak{d} \setminus \mathfrak{P}$ отображение $w = f(z)$ является внутренним, поэтому точки z_n все принадлежат границе λ и одна из их предельных точек $z' \in \lambda$. Из (1) и (2) следует, что $f(z') = w_0 \in \mathfrak{P}_1$, т. е. должно быть $z' \in \mathfrak{Q}$, что противоречит построению кривой λ.

Лемма Стоилова доказана.

Ниже мы покажем, что утверждение этой леммы останется справедливым, если предположить образ $\mathfrak{P}_1$ лишь нигде не плотным на плоскости; это будет следовать из основной теоремы 8.

§ 2. Основная теорема о внутренних отображениях

Рассмотрим снова некоторое внутреннее отображение $w = f(z)$ области $\mathfrak{D}$. Из приведенной выше основной теоремы Стоилова следует, что функция $f(z)$ отображает область взаимно однозначно на некоторую риманову поверхность $\mathfrak{F}$, расположенную над плоскостью w.

Возьмем произвольную точку $z_0 \in \mathfrak{D}$; скажем, что отображение $w = f(z)$ сохраняет ориентацию в точке z_0 или меняет ее на противоположную, смотря по тому, совпадает или нет направление обхода простой замкнутой кривой l, лежащей в достаточно малой окрестности z_0 и содержащей эту точку внутри, с направлением обхода ее образа $f(l)$ вокруг точки $w_0 = f(z_0)$.

Из той же теоремы Стоилова следует, очевидно, что внутреннее отображение области $\mathfrak{D}$ либо во всех точках ее сохраняет ориентацию, либо во всех же точках $\mathfrak{D}$ меняет на противоположную.

Целью настоящего параграфа является доказательство следующего основного утверждения.

Теорема 8. *Пусть в области $\mathfrak{D}$ плоскости z расположено произвольное совершенное и нигде не плотное множество точек $\mathfrak{P}$ и пусть непрерывная в $\mathfrak{D}$ функция $f(z)$ осуществляет внутреннее отображение каждой компоненты (открытого) дополнения $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ с сохранением ориентации в каждой его точке. Тогда, если при отображении $w = f(z)$*

1) *никакой континуум на $\mathfrak{P}$ не сводится в точку и*

2) *образ $\mathfrak{P}_1$ множества $\mathfrak{P}$ нигде не плотен на плоскости w, то это отображение является внутренним в $\mathfrak{D}$; в частности, найдется точка множества $\mathfrak{P}_1$, в окрестности которой $f(z)$ однолистна.*

Доказательство.

1. Не ограничивая общности, можно предположить, что $\mathfrak{D}$ есть некоторый круг, причем, взяв, если нужно, меньший

круг, можно считать, что функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы в замкнутом круге $\overline{\mathfrak{D}}$. Тогда образ множества $\mathfrak{P} \subset \overline{\mathfrak{D}}$ есть замкнутое (компактное) нигде не плотное множество $\mathfrak{P}_1$ на плоскости w.

Из условий теоремы следует, что никакой вообще континуум в области $\mathfrak{D}$ не сводится в точку при отображении $w = f(z)$.

Следовательно, если это отображение не является внутренним, то найдется точка $z_0 \in \mathfrak{P}$ и замкнутая область $\overline{\mathfrak{d}} \subset \mathfrak{D}$, содержащая эту точку внутри, такие, что $w_0 = f(z_0)$ есть граничная точка континуума $\overline{\mathfrak{d}}_1 = f(\overline{\mathfrak{d}})$. По условию прообраз $\mathfrak{H}$ точки w_0 в $\mathfrak{d}$ — очевидно, принадлежащий $\mathfrak{P}$, — есть замкнутое всюду разрывное множество; поэтому внутри области $\mathfrak{d}$ можно определить жорданову область $\mathfrak{b}$, содержащую z_0 внутри, граница λ которой не пересекает множества $\mathfrak{H}$. Для континуума $\overline{\mathfrak{b}}_1 = f(\overline{\mathfrak{b}})$ точка w_0 также является граничной.

Обозначим через λ_1 образ замкнутой кривой λ; по построению $w_0 \notin \lambda_1$. Пусть $\mathfrak{V}(w_0)$ — круг с центром w_0 такой, что

$$\overline{\mathfrak{V}(w_0)} \cap \lambda_1 = 0. \tag{3}$$

Тогда все граничные точки континуума $\overline{\mathfrak{b}}_1 = f(\overline{\mathfrak{b}})$, попавшие внутрь круга $\mathfrak{V}(w_0)$ — совокупнссть их обозначим через $\mathfrak{P}_1'$, — обязательно принадлежат $\mathfrak{P}_1 = f(\mathfrak{P})$: ведь этим точкам по построению должны соответствовать внутренние точки области $\mathfrak{b}$, которые, следовательно, могут принадлежать лишь множеству $\mathfrak{P}$.

Так как $\overline{\mathfrak{b}}_1$ — замкнутое множество, то в окрестности $\mathfrak{V}(w_0)$ его граничной точки w_0 найдутся внешние для $\overline{\mathfrak{b}}_1$ точки. Пусть w' — одна из них и $\mathfrak{Q}(w') \subset \mathfrak{V}(w_0)$ — круг с центром w', расположенный вне множества $\overline{\mathfrak{b}}_1$. Будем перемещать $\mathfrak{Q}(w')$ вдоль радиуса $\overline{w'w_0}$ по направлению к центру w_0 круга $\mathfrak{V}(w_0)$. На этом радиусе найдется такая первая точка w'', что круг $\mathfrak{Q}(w'')$ с центром w'', конгруэнтный кругу $\mathfrak{Q}(w')$, имеет на своей границе точки из $\mathfrak{P}_1'$; каждую из таких точек $\mathfrak{P}_1'$ временно назовем сильно достижимой извне 1) с определяющим ее кругом $\mathfrak{Q}(w'') = \mathfrak{Q}$. Так как произвольной точке из $\mathfrak{P}_1'$ соответствуют некоторые внутренние точки области $\mathfrak{b}$, то с самого начала можно предполагать точку z_0 выбранной так, что $w_0 = f(z_0)$ есть сильно достижимая извне точка границы множества $\bar{\mathfrak{b}}_1$ с некоторым определяющим ее кругом $\mathfrak{Q}$; для такой точки радиус рассматривавшегося круга $\mathfrak{B}(w_0)$ возьмем меньшим, чем радиус $\mathfrak{Q}$ (рис. 3).

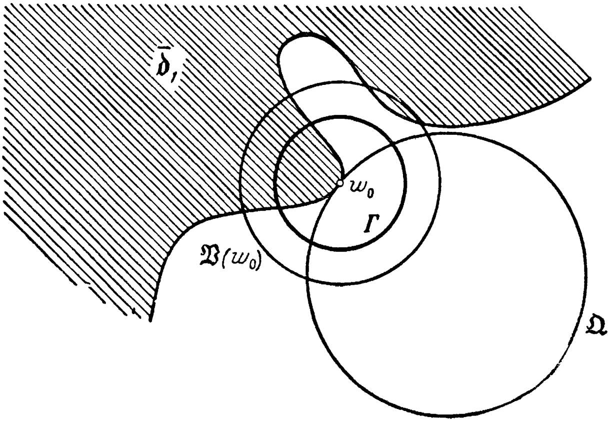

Рис. 3.

Отметим, что так как $\bar{\mathfrak{b}}_1$ — континуум, точка $w_0 \in \bar{\mathfrak{b}}_1$ и имеет место (3), то в силу выбора круга $\mathfrak{B}(w_0)$ каждая замкнутая кривая $\Gamma \subset \mathfrak{B}(w_0)$, содержащая точку w_0 внутри, обязательно пересекает $\bar{\mathfrak{b}}_1$ и множество $\mathfrak{P}_1'$.

Рассмотрим открытое подмножество $\bar{\mathfrak{b}}_1 \cap \mathfrak{B}(w_0)$ множества $\bar{\mathfrak{b}}_1 = f(\bar{\mathfrak{b}})$. В силу непрерывности отображения $w = f(z)$ ему в $\mathfrak{b}$ соответствует некоторое открытое множество $\mathfrak{D}$, расположенное в силу (3) строго внутри области $\mathfrak{b}$, т. е. $\bar{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{b}$. При этом граничным точкам $\mathfrak{P}_1' \subset \mathfrak{B}(w_0)$ континуума $\bar{\mathfrak{b}}_1$ соответствуют некоторые внутренние точки множества $\mathfrak{D}$.

---

1) В литературе промелькнул термин «хорошо видимая» точка (bien visible), но и он не является общепринятым.

Легко видеть, что граничные точки множества $\mathfrak{D}$, т. е. точки $\overline{\mathfrak{D}} \setminus \mathfrak{D}$, имеют образы лишь на границе круга $\mathfrak{B}(w_0)$.

В самом деле, образ множества $\overline{\mathfrak{D}}$ принадлежит замкнутому кругу $\overline{\mathfrak{B}}$, и если некоторая точка $z' \in \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{d}$ соответствует внутренней точке круга $\mathfrak{B}$, то из определения $\mathfrak{D}$ следует, что $z' \in \mathfrak{D}$.

Очевидно, последние утверждения верны не только для круга $\mathfrak{B}(w_0)$, но и для любой области $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{B}(w_0)$, содержащей точку w_0.

2. Рассмотрим открытое множество $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$. Из условий теоремы следует, что каждая компонента [1] его отображается функцией $f(z)$ на некоторую риманову поверхность $\mathfrak{F}$, расположенную полностью над кругом $\mathfrak{B}(w_0)$. Обозначим через $\mathfrak{B}^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ компоненты открытого множества $\mathfrak{B}(w_0) \setminus \mathfrak{P}_1$ и покажем, что над точками одной компоненты $\mathfrak{B}^{(s)}$ расположено одно и то же конечное число точек, принадлежащих указанным — возможно, различным — поверхностям $\mathfrak{F}$ (считая при этом точки ветвления кратными; именно, точку порядка $k - 1$ рассматриваем как k-кратную).

Прежде всего, над каждой точкой из $\mathfrak{B}^{(s)}$ расположено всегда конечное число таких точек. В самом деле, если бы над некоторой точкой $w' \in \mathfrak{B}^{(s)}$ было бесконечное множество точек $\{w'_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, принадлежащих поверхностям $\mathfrak{F}$, то им на множестве $\mathfrak{D}$ соответствовало бы бесконечное множество различных точек $\{z'_n\}$ таких, что

$$f(z'_n) = w' \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если z' — предельная точка множества $\{z'_n\}$, то ясно, что ни в какой ее окрестности отображение $w = f(z)$ не может быть внутренним и, следовательно, $z' \in \mathfrak{P} \cap \overline{\mathfrak{D}}$. Но так как $\overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{d}$, то в силу непрерывности функции $f(z)$ в $\mathfrak{d}$ должно быть

$$f(z') = w';$$

поэтому точка w' должна принадлежать множеству $\mathfrak{P}_1$, чего не может быть, так как она взята из $\mathfrak{B}^{(s)} \subset \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{P}_1$.

Докажем теперь, что над всеми точками $\mathfrak{B}^{(s)}$ находится одно и то же число точек поверхностей $\mathfrak{F}$. Множество проек-

---

[1] Являющаяся областью (см. [45]).

ций всех точек ветвления $\{\mathfrak{F}\}$ на плоскость w обозначим через $\varkappa$; так как на каждой поверхности точки ветвления изолированы и самих поверхностей $\mathfrak{F}$ не более чем счетное множество, то $\varkappa$ не более чем счетно.

Пусть, вопреки утверждению, над некоторыми точками w_1, $w_2 \in \mathfrak{B}^{(s)}$ находится соответственно m_1 и m_2 точек $\mathfrak{F}$, причем

$$m_1 > m_2 \geqslant 0.$$

Соединим w_1 и w_2 внутри $\mathfrak{B}^{(s)}$ простой ломаной L; это возможно, так как $\mathfrak{B}^{(s)}$ — область. Деформацией этой ломаной легко достичь того, чтобы L не пересекала множества $\varkappa$, кроме, возможно, концевых точек w_1, w_2; это можно сделать, так как $\varkappa$ не более чем счетно.

Будем двигаться на поверхностях $\mathfrak{F}$ от каждой из ее m_1 точек, лежащих над w_1, вдоль ломаной L; ясно, что над некоторой окрестностью точки w_1 мы будем перемещаться вдоль m_1 ломаных, лежащих одна над другой (это, очевидно, верно и в случае, когда над w_1 лежат точки ветвления $\{\mathfrak{F}\}$).

Обозначим через Ω множество точек $\mathfrak{B}^{(s)}$, над каждой из которых расположено не более чем $m_1 - 1$ точек поверхностей $\{\mathfrak{F}\}$; Ω замкнуто в $\mathfrak{B}^{(s)}$, так как легко показать, что его дополнение открыто.

По нашему предположению, $w_2 \in \Omega$; поэтому при указанном выше движении вдоль L найдется первая точка w' пересечения L с Ω; в силу выбора ломаной L — вне множества $\varkappa$ — мы будем двигаться вдоль нее по поверхностям $\mathfrak{F}$ до точки w' беспрепятственно. Отсюда следует, что открытый с конца w' путь $\overline{w_1 w'} \subset L$ тождественно переносится на поверхности $\mathfrak{F}$ с m_1 начальными точками[1]) на них, дающими начало ровно m_1 ломаным.

Ясно, что по крайней мере для одной из этих ломаных — пусть $\overline{\tilde{w}_1 \tilde{w}'}$ — конец ее, расположенный над w', не принадлежит соответствующей поверхности $\mathfrak{F}$. Возьмем на этой поверхности последовательность точек $\tilde{w}_n \in \overline{\tilde{w}_1 \tilde{w}'}$, сходящихся в проекции к w'; в открытом множестве $\mathfrak{D}$ им соответствует последовательность $\{z'_n\}$.

---

[1]) Некоторые из этих точек могут совпадать, если над w_1 имеются точки ветвления $\{\mathfrak{F}\}$.

Предельная точка z' множества $\{z'_n\}$ не может принадлежать дополнению $\mathfrak{O} \setminus \mathfrak{P}$, так как в противном случае путь $\overline{\tilde{w}_1 \tilde{w}'}$ можно было бы продолжить на поверхности $\mathfrak{F}$ вдоль L над некоторой окрестностью точки $w' = f(z')$.

Следовательно, z' принадлежит либо множеству $\mathfrak{P}$, либо границе множества $\mathfrak{O}$; но первое невозможно, так как $w' \notin \mathfrak{P}_1$, а второе невозможно, так как образ границы множества $\mathfrak{O}$ принадлежит границе круга $\mathfrak{B}(w_0)$ (см. выше), а ведь $w' \in \mathfrak{B}^{(s)} \subset \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{P}_1$.

Итак, предполагая в условиях теоремы 8, что отображение $w = f(z)$ не является внутренним, мы доказали следующее:

Существуют жорданова область $\mathfrak{d}$, $\overline{\mathfrak{d}} \subset \mathfrak{D}$, содержащая внутри некоторую точку $z_0 \in \mathfrak{P}$, и круг $\mathfrak{B}(w_0)$ с центром в точке $w_0 = f(z_0)$ замкнутого нигде не плотного на плоскости множества $\mathfrak{P}_1 = f(\mathfrak{P})$ со следующими свойствами:

а) точке z_0 соответствует при отображении $w = f(z)$ граничная точка w_0 континуума $\overline{\mathfrak{d}}_1 = f(\overline{\mathfrak{d}})$, сильно достижимая извне и определенная некоторым кругом $\mathfrak{Q}$;

б) радиус круга $\mathfrak{B}(w_0)$ меньше радиуса круга $\mathfrak{Q}$;

в) каждая замкнутая кривая $\Gamma \subset \mathfrak{B}(w_0)$, содержащая точку w_0 внутри, пересекает континуум $\mathfrak{d}_1$;

г) если $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{B}(w_0)$ — произвольная область, содержащая точку w_0, то полный прообраз множества $\overline{\mathfrak{d}}_1 \cap \mathfrak{G}$ в $\mathfrak{d}$ есть открытое множество $\mathfrak{O}$, лежащее строго внутри $\mathfrak{d}$: $\overline{\mathfrak{O}} \subset \mathfrak{d}$;

д) граница множества $\mathfrak{O}$, т. е. множество $\overline{\mathfrak{O}} \setminus \mathfrak{O}$, переходит при отображении $w = f(z)$ в границу области $\mathfrak{G}$;

е) каждая компонента открытого множества $\mathfrak{d} \setminus \mathfrak{P}$ топологически отображается функцией $w = f(z)$ на некоторую риманову поверхность $\mathfrak{F}$, причем совокупность $\{\mathfrak{F}\}$ всех этих поверхностей над кругом $\mathfrak{B}(w_0)$ обладает следующим свойством: над каждой точкой одной и той же компоненты $\mathfrak{B}^{(s)}$ множества $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{P}_1$ $(s = 1, 2, \ldots)$ расположено одинаковое и конечное число точек, принадлежащих совокупности $\{\mathfrak{F}\}$ (при этом точки ветвления их считаем кратными).

Примечание. Заметим, что теорему 8 (и свойство е)) легко доказать, используя понятие локальной степени отображения [58]; в самом деле, свойство е) следует из свойства степени [59]. Далее, очевидно, что $\gamma(w_0) = 0$; с другой стороны, для $w' \in \mathfrak{B}^{(s)}(w_0) \setminus \mathfrak{P}_1$

имеем в силу условия теоремы 8 о сохранении ориентации и свойства е)

$$\gamma(w') = \sum_{z' \in f^{-1}(w')} \gamma(z') > 0$$

(см. [60]), что противоречит свойству постоянства степени. Это позволяет обобщить теорему 8 и на n-мерный случай. Мы все же приводим в тексте другое доказательство, так как основная его часть необходима при доказательстве теоремы 10 (см. ниже).

3. Проведем внутри круга $\mathfrak{B}(w_0)$ окружность Γ с центром в точке w_0, пересекающую множество $\mathfrak{P}_1 = f(\mathfrak{P})$ по всюду разрывному (и, очевидно, замкнутому) множеству $\mathfrak{C} = \Gamma \cap \mathfrak{P}_1$, причем так, чтобы Γ не пересекала множества $\varkappa$ проекций точек ветвления, принадлежащих поверхностям $\{\mathfrak{F}\}$; это можно сделать, так как множество $\mathfrak{P}_1$ нигде не плотно на плоскости w, а $\varkappa$ не более чем счетно (приложение, § 2)[1]).

Обозначим через $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e} \subset \mathfrak{b}$, полный прообраз множества $\mathfrak{C}$ при отображении $w = f(z)$; очевидно, $\mathfrak{e}$ замкнуто и всюду разрывно.

Из построения окружности Γ и свойств поверхностей $\{\mathfrak{F}\}$ над кругом $\mathfrak{B}(w_0)$ следует, что над каждой дугой $\Gamma_i \subset \Gamma$ $(i = 1, 2, \ldots)$, смежной к множеству $\mathfrak{C}$, расположено конечное множество (быть может, пустое) простых дуг $\Gamma_i^{(m)}$ $(m = 0, 1, \ldots, m_i;\ i = 1, 2, \ldots)$, принадлежащих поверхностям $\mathfrak{F}$ и попарно без общих внутренних точек (если некоторые из них лежат на одной поверхности).

Так как над Γ нет точек ветвления поверхностей $\{\mathfrak{F}\}$, то в окрестности каждой (открытой) дуги $\Gamma_i^{(m)}$ обратная функция $z = \varphi(w)$ однолистна на соответствующей поверхности $\mathfrak{F}$, поэтому в круге $\mathfrak{b}$ этим дугам соответствуют m_i жордановых интервалов[2] $\gamma_i^{(m)}$ $(m = 0, 1, \ldots, m_i)$ попарно без общих внутренних точек. При движении вдоль $\gamma_i^{(m)}$ в каком-либо направлении соответствующая точка на $\Gamma_i^{(m)}$ стремится к определенной точке над множеством $\mathfrak{C} = \Gamma \cap \mathfrak{P}_1$. Но функция $f(z)$ ни один континуум в $\bar{\mathfrak{b}}$ не переводит в точку, поэтому все жордановы интервалы $\gamma_i^{(m)}$ суть (открытые) простые дуги, концы которых принадлежат замк-

---

[1] Отметим, что в нашем случае $\mathfrak{C}$ не пусто, так как w_0 — сильно достижимая точка $\mathfrak{P}_1$ и имеет место свойство в).

[2] Так называется гомеоморфный образ интервала (0, 1) на плоскости (ср. [43]).

нутому множеству $\mathfrak{e}$, причем соответствие между каждой из дуг $\gamma_i^{(m)}$ и дугой $\Gamma_i^{(m)} \equiv \Gamma_i$ является топологическим.

Из предыдущего следует еще, что все дуги системы $\left\{\gamma_i^{(m)}\right\}$ $(m = 0, 1, \ldots, m_i;\ i = 1, 2, 3, \ldots)$ попарно не имеют общих внутренних точек.

Круг, ограниченный окружностью Γ, обозначим через $\mathfrak{G}$; полный прообраз множества $\overline{\mathfrak{d}}_1 \cap \mathfrak{G}$ является открытым множеством $\mathfrak{D}$, лежащим строго внутри $\mathfrak{d} : \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{d}$.

В силу свойства д) граничные точки множества $\mathfrak{D}$ переходят при отображении $w = f(z)$ в некоторые точки окружности Γ; поэтому граница $\mathfrak{D}$ принадлежит системе дуг $\left\{\gamma_i^{(m)}\right\}$ и множеству $\mathfrak{e}$. Но так как все дуги $\left\{\gamma_i^{(m)}\right\}$ попарно без общих внутренних точек, то отсюда вытекает такое свойство границы $\mathfrak{D}$: если точка $z' \in \gamma_i^{(m)}$ является граничной для $\mathfrak{D}$, то и вся дуга $\gamma_i^{(m)}$ принадлежит границе $\mathfrak{D}$. Следовательно, граница $\mathfrak{D}$ состоит из некоторого множества (полных) дуг системы $\left\{\gamma_i^{(m)}\right\}$ и точек замкнутого разрывного множества $\mathfrak{e}$.

4. Компоненту открытого множества $\mathfrak{D}$, содержащую точку z_0, обозначим через $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{g}$ является областью (ср. [45]). Из сказанного выше следует, что граница области $\mathfrak{g}$ есть некоторая совокупность открытых дуг $\left\{\gamma_i^{(m)}\right\}$ и точек некоторого подмножества разрывного множества $\mathfrak{e}$.

Возьмем замыкание $\overline{\mathfrak{g}}$ области $\mathfrak{g}$. Его дополнение по отношению к расширенной плоскости комплексного переменного z есть некоторое открытое множество. Компоненту этого множества, содержащую бесконечно удаленную точку, обозначим через $\mathfrak{h}$; тогда $\mathfrak{h}$ есть область, а так как $\overline{\mathfrak{g}}$ — континуум, то область $\mathfrak{h}$ односвязна. Ясно, что граница $\mathfrak{h}$ есть часть границы $\overline{\mathfrak{g}} \setminus \mathfrak{g}$ области $\mathfrak{g}$, а потому есть совокупность некоторых дуг системы $\left\{\gamma_i^{(m)}\right\}$ и замкнутого подмножества ε разрывного множества $\mathfrak{e} : \varepsilon \subset \mathfrak{e}$.

Докажем теперь, что граница γ области $\mathfrak{h}$ есть замкнутая жорданова кривая. Для доказательства мы применим теорию простых концов односвязной области (ср. [43]).

Обозначим граничные для области $\mathfrak{h}$ дуги системы $\left\{\gamma_i^{(m)}\right\}$ через $\{\gamma_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Покажем сначала, что каждый простой конец области $\mathfrak{h}$ содержит одну-единственную граничную точку.

Если какой-либо простой конец области $\mathfrak{h}$ содержит континуум $\mathfrak{k}$, то, так как он содержит не более одной достижимой точки области и множество $\varepsilon \subset \mathfrak{e}$ разрывно, найдется подконтинуум $\mathfrak{k}' \subset \mathfrak{k}$, состоящий из недостижимых точек области $\mathfrak{h}$, расположенных вне ε. Но точка $z' \in \mathfrak{k}'$ является граничной точкой области $\mathfrak{h}$, а потому и области $\mathfrak{g}$, и так как точка $z' \notin \varepsilon$, то она принадлежит одной из дуг γ_i, которая является граничной для $\mathfrak{g}$ и, как легко видеть, для $\mathfrak{h}$; следовательно, $\mathfrak{k}' \subset \gamma_i$. Но это противоречит тому, что каждая точка простой дуги γ_i является достижимой граничной точкой области $\mathfrak{h}$.

Докажем теперь, что каждая граничная точка области $\mathfrak{h}$ принадлежит лишь одному простому концу.

Пусть, вопреки утверждению, два различных простых конца η_1 и η_2 одновременно содержат некоторую точку z'. Так как z' — достижимая точка для обоих простых концов η_1, η_2, то, очевидно, эти концы можно соединить простой открытой дугой l с концами в точке z' и полностью лежащей в области $\mathfrak{h}$; дополнив дугу l точкой z', мы превратим ее в замкнутую жорданову кривую $\bar{l}$. Ясно, что $\bar{l}$ не имеет общих точек с областью $\mathfrak{g}$.

Так как $\bar{l}$ одновременно определяет достижимую точку z' двух различных концов η_1 и η_2, то легко видеть, что как внутри жордановой кривой $\bar{l}$, так и вне ее находятся точки $\mathfrak{g}$, но так как $\bar{l}$ не пересекает $\mathfrak{g}$, то это противоречит связности области $\mathfrak{g}$.

Итак, мы показали, что каждый простой конец области $\mathfrak{h}$ содержит лишь одну-единственную точку и различным простым концам отвечают различные точки плоскости, т. е. граница области $\mathfrak{h}$ есть простая замкнутая кривая γ (которая совпадает с «внешним» граничным континуумом области $\mathfrak{g}$).

5. Образ кривой γ при непрерывном отображении $w = f(z)$ есть континуум, расположенный на окружности Γ, в силу свойства границы области $\mathfrak{g}$ (см. выше д)). Так как w_0 — сильно достижимая точка, то в круге $\mathfrak{Q}$, определяющем эту точку, нет образа ни одной точки области $\bar{\mathfrak{d}}$ и, в частности, кривой $\gamma \subset \bar{\mathfrak{d}}$ (см. рис. 3, стр. 86). В силу выбора круга $\mathfrak{V}(w_0)$ и окружности $\Gamma \subset \bar{\mathfrak{V}}(w_0)$ (стр. 89), образ кривой γ не может совпадать со всей окружностью Γ и, следовательно, является некоторой простой дугой $\Gamma_0 \subset \Gamma$.

Зададим определенное направление обхода вдоль замкнутой жордановой кривой γ; оно порождает определенную ориентацию каждой из дуг $\gamma_i\subset\gamma$ ($i=1, 2, \ldots$), которую назовем положительной.

Мы докажем, что в наших условиях найдутся две дуги γ_1 и γ_2 кривой γ — смежные с множеством $\varepsilon\subset\mathfrak{e}$ — такие, что образ их есть одна и та же дуга $\Gamma_i\subset\Gamma_0\subset\Gamma$, смежная к $\mathfrak{E}$, причем положительной ориентации дуг γ_1, γ_2 соответствуют противоположные ориентации дуги Γ_i. Покажем сначала, как отсюда возникает искомое противоречие с условиями теоремы 8.

Образы дуг γ_1, γ_2 при отображении $w=f(z)$ суть простые дуги $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ на соответствующих поверхностях $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ (возможно, совпадающих); по условию эти дуги расположены над дугой $\Gamma_i\subset\Gamma$ и конгруэнтны ей. Возьмем произвольную точку $w'\in\Gamma_i$; ей на дугах $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ соответствуют точки $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$. В силу свойств окружности Γ найдутся однолистные круги $\mathfrak{K}(\tilde{w}_1)$ и $\mathfrak{K}(\tilde{w}_2)$ одинаковых радиусов, расположенные соответственно на $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, в которых обратное отображение $z=\varphi(w)$ однолистно; проекции этих кругов на плоскость w дают конгруэнтный им круг $K(w')$. Поэтому вместо перехода к поверхностям $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ будем считать, что в $\mathfrak{K}(w')$ определены два однолистных (топологических) отображения $z=\varphi_1(w)$ и $z=\varphi_2(w)$, «обратные» к отображению $w=f(z)$.

Пересечение круга $\mathfrak{K}(w')$ с кругом $\mathfrak{G}$, ограниченным окружностью Γ, есть некоторая жорданова область $\mathfrak{G}_0\subset\mathfrak{G}$; пусть $\Gamma'\subset\Gamma$ — ее граничная дуга, лежащая на Γ_i. При однолистных отображениях $z=\varphi_1(w)$ и $z=\varphi_2(w)$ области $\mathfrak{G}_0$, расположенной внутри Γ, в силу определения $\mathfrak{g}$ и кривой γ (см. выше) получим две области $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$, расположенные также внутри $\mathfrak{g}$ и примыкающие к ее граничным дугам $\gamma_1\gamma_2\subset\gamma$ вдоль дуг γ_1' и γ_2', соответствующих Γ'.

По условию при указанных отображениях положительной ориентации дуг γ_1', γ_2' (соответствующих определенному направлению обхода замкнутой кривой γ) отвечают различные ориентации их образа — дуги Γ'. Но тогда направления обхода областей, $\mathfrak{g}_1$ $\mathfrak{g}_2\subset\mathfrak{g}$, индуцируемые положительным направлением обхода их граничных дуг γ_1', γ_2', при отображении $w=f(z)$ переходят в различные направления обхода области $\mathfrak{G}_0\subset\mathfrak{G}$ с граничной дугой Γ'. Следовательно, при однолистном в $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{d} \setminus \mathfrak{P}$ отображении $w = f(z)$ для одной из областей $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ ориентация замкнутых кривых меняется на противоположную, что невозможно.

Итак, для завершения доказательства теоремы 8 достаточно будет доказать такое предложение:

Лемма 23. *Пусть задано непрерывное отображение* $w = f(z)$ *замкнутой жордановой кривой* γ *плоскости* z *на простую дугу* Γ *плоскости* w *и замкнутое всюду разрывное подмножество* $\mathfrak{E} \subset \Gamma$ *со следующими свойствами*:

1) *полный прообраз* $\mathfrak{e} \subset \gamma$ *множества* $\mathfrak{E}$ *есть* (*замкнутое*) *разрывное множество*;

2) *на каждой дуге* $\gamma_i \subset \gamma$ $(i = 1, 2, \ldots)$, *смежной к множеству* $\mathfrak{e}$, *отображение* $w = f(z)$ *является топологическим.*

Тогда найдутся две смежные к $\mathfrak{e}$ *дуги* γ_1, $\gamma_2 \subset \gamma$, *образ которых есть одна дуга* $\Gamma_i \subset \Gamma$ (*смежная к* $\mathfrak{E}$) *и такие, что положительной ориентации дуг* γ_1 *и* γ_2[1]) *отвечают противоположные ориентации дуги* Γ_i.

Отображая гомеоморфно простую дугу Γ на отрезок $[0, 1]$ оси Oy, а замкнутую простую кривую γ — на отрезок $[0, 1]$ оси Ox, не различая в последнем случае концевых точек отрезка, и вспоминая, что гомеоморфизм между интервалами осей Ox, Oy задается всегда строго монотонными функциями, легко сведем доказательство леммы 23 к доказательству следующего утверждения, которое сформулируем даже в несколько более общем виде, чем это нам необходимо:

Лемма 24. *Пусть на отрезке* $[0, 1]$ *оси* Ox *заданы непрерывная функция* $y = \varphi(x)$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, *и некоторое замкнутое разрывное множество* $\mathfrak{e} \subset [0, 1]$ *со следующими свойствами*:

1) *образ* $\mathfrak{E}$ *множества* $\mathfrak{e}$ *при отображении* $y = \varphi(x)$ *есть* (*замкнутое*) *разрывное множество на оси* Oy, *причем полный прообраз множества* $\mathfrak{E}$ *совпадает с* $\mathfrak{e}$;

2) *на каждом интервале смежности множества* $\mathfrak{e}$ *функция* $\varphi(x)$ *строго монотонна.*

Тогда либо функция $\varphi(x)$ *строго монотонна на всем отрезке* $[0, 1]$, *либо найдутся два смежных к* $\mathfrak{e}$ *интер-*

---

[1]) Соответствующей определенному направлению обхода замкнутой кривой γ.

вала, образ которых есть один и тот же интервал смежности к $\mathfrak{E}$, причем на одном из них $\varphi(x)$ возрастает, а на другом — убывает.

Заметим, что из этой леммы вытекает лемма 23, так как отображение $y=\varphi(x)$ отрезка $[0,\ 1]$, индуцируемое отображением $w=f(z)$ кривой γ на дугу Γ, не является монотонным, потому что кривая γ замкнута и, следовательно, $\varphi(0)=\varphi(1)$.

Доказательство леммы 24. Из условий леммы сразу следует, что прообраз любого интервала, смежного с множеством $\mathfrak{E}$, состоит лишь из интервалов смежности множества $\mathfrak{e}$; при этом некоторые интервалы смежности могут оказаться полуинтервалами, если какой-либо конец отрезка $[0,\ 1]$ не принадлежит множеству $\mathfrak{e}$ или $\mathfrak{E}$.

Далее, так как ни на одном отрезке $[a,\ b]\subset[0,\ 1]$ функция $\varphi(x)$ не постоянна, то ее монотонность на отрезке $[0,\ 1]$ означает строгую монотонность.

Поэтому если $\varphi(x)$ не монотонна, то найдутся точки x_1, x_2, $\in[0,\ 1]$, $x_1<x_2$, для которых

$$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=y_0. \tag{4}$$

Покажем, что в этом случае найдутся два смежных интервала i_1, i_2 множества $\mathfrak{e}$, образом которых является один и тот же интервал смежности I множества $\mathfrak{E}$.

Если $x_1\notin\mathfrak{e}$, то и $x_2\notin\mathfrak{e}$ и $y_0\notin\mathfrak{E}$, так как полный прообраз множества $\mathfrak{E}$ совпадает с $\mathfrak{e}$. Пусть I — интервал смежности множества $\mathfrak{E}$, содержащий точку y_0. Прообраз интервала I содержит смежные интервалы i_1, i_2 множества $\mathfrak{e}$, содержащие точки x_1, x_2, причем эти интервалы различны, так как равенство (4) для точек одного смежного к $\mathfrak{e}$ интервала невозможно в силу строгой монотонности на нем функции $\varphi(x)$. Ясно, что образ интервалов i_1, i_2 есть интервал I.

Если же $x_1\in\mathfrak{e}$, то $x_2\in\mathfrak{e}$ и $y_0\in\mathfrak{E}$, так как полный прообраз точки $y_0\in Oy$ принадлежит $\mathfrak{e}$. Так как на отрезке $[x_1,\ x_2]$ функция $\varphi(x)$ непостоянна, то по крайней мере одно из чисел

$$m=\inf\varphi(x) \quad \text{и} \quad M=\sup\varphi(x), \qquad x\in[x_1,\ x_2],$$

отлично от y_0. Пусть, например, $y_0<M$ и $x^*\in(x_1,\ x_2)$ — точка, для которой $\varphi(x^*)=M$, в силу (4) такая точка существует.

Очевидно, что $x^* \in \mathfrak{e}$ и точки y_0, $M \in \mathfrak{E}$; следовательно, каждый смежный интервал множества $\mathfrak{E}$ либо не пересекается с отрезком $[y_0\ M]$, либо полностью ему принадлежит. Так как множество $\mathfrak{E}$ всюду разрывно, то внутри отрезка $[y_0, M]$ найдется его интервал смежности I.

Из предыдущего построения следует, что множество значений непрерывной функции $\varphi(x)$ как на отрезке $[x_1, x^*]$, так и на отрезке $[x^*, x_2]$ содержит сегмент $[y_0, M]$ и, следовательно, прообраз интервала I содержит по крайней мере два интервала: $i_1 \subset [x_1, x^*]$, $i_2 \subset [x^*, x_2]$, смежных к $\mathfrak{e}$. Как и выше, образ этих интервалов совпадает с I.

Итак, в обоих рассмотренных случаях найдутся по крайней мере два интервала смежности i_1, i_2 множества $\mathfrak{e}$, образ которых есть один и тот же интервал смежности I множества $\mathfrak{E}$.

Полный прообраз интервала $I = (y_1, y_2)$ содержит лишь конечное число смежных интервалов $i_n = (\alpha_n, \beta_n)$ множества $\mathfrak{e}$[1]; это следует из того, что на концах интервала i_n функция $\varphi(x)$ принимает разные значения y_1 и y_2. В самом деле, если бы интервалов i_n $(n = 1, 2, \ldots)$ было бесконечное множество, то $\operatorname{mes} i_n \to 0$ при $n \to \infty$ и можно было бы выделить подпоследовательность интервалов i_n, сходящихся к некоторой точке $\bar{x} \in [0, 1]$; при этом соответствующая последовательность значений функции $\varphi(x)$ на концах этих i_n, очевидно, не имеет предела, что противоречит непрерывности $\varphi(x)$ на отрезке $[0, 1]$.

Поэтому в прообразе интервала I найдутся два соседних смежных интервала множества $\mathfrak{e}$

$$i_1 = (\alpha_1, \beta_1), \quad i_2 = (\alpha_2, \beta_2), \quad \beta_1 \leqslant \alpha_2,$$

т. е. таких, что отрезок $[\beta_1, \alpha_2]$ не содержит больше интервалов i_n, соответствующих интервалу I.

Если $\beta_1 = \alpha_2$, то непосредственно получаем, что если на одном из интервалов i_1, i_2 функция $\varphi(x)$ возрастает, то на другом — убывает, т. е. в этом случае лемма 24 справедлива.

Пусть $\beta_1 < \alpha_2$ и характер монотонности функции $\varphi(x)$ на обоих интервалах i_1, i_2 одинаков, например, $\varphi(x)$ возрастает и на i_1, и на i_2. Тогда, так как $\varphi(x)$ непрерывна

---

[1] Некоторые из указанных интервалов могут оказаться полуинтервалами.

на отрезке $[\beta_1, \alpha_2]$ и $\varphi(\beta_1) = y_2$, $\varphi(\alpha_2) = y_1$, то множество ее значений на этом отрезке снова содержит интервал $I = (y_1, y_2)$; это же противоречит тому, что отрезок $[\beta_1, \alpha_2]$ не содержит ни одного интервала $i_n = (\alpha_n, \beta_n)$.

Следовательно, на одном из интервалов i_1 и i_2 функция $\varphi(x)$ возрастает, а на другом — убывает.

Тем самым лемма 24, а вместе и теорема 8, доказана полностью.

Из теоремы 8 легко вывести

Следствие. *Пусть в области $\mathfrak{D}$ заданы непрерывная функция $f(z)$ и совершенное нигде не плотное множество $\mathfrak{P}$, такие, что в окрестности каждой точки дополнения $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ отображение $w = f(z)$ является внутренним. Тогда для того чтобы это отображение было внутренним в $\mathfrak{D}$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *никакой континуум на $\mathfrak{P}$ не сводится в точку;*

2) *либо во всех точках $z \in \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ ориентация сохраняется, либо во всех этих точках она меняется на противоположную;*

3) *образ $\mathfrak{P}_1$ множества $\mathfrak{P}$ есть множество первой категории*[1]) *на плоскости.*

В самом деле, необходимость условий 1), 2) очевидна. Необходимость же условия 3) следует из того, что $\mathfrak{P}$ можно покрыть счетной системой $\{U\}$ таких окрестностей своих точек, что $\overline{U} \subset \mathfrak{D}$, причем в каждой из этих окрестностей отображение $w = f(z)$ ведет себя, как степень (с точностью до топологического преобразования); ясно, что образ порции $\mathfrak{P}$ в такой окрестности нигде не плотен, а потому образ всего $\mathfrak{P}$ есть сумма счетного числа нигде не плотных множеств, что и нужно.

Для доказательства достаточности указанных условий можно предположить, что отображение $w = f(z)$ вне $\mathfrak{P}$ сохраняет ориентацию, так как в противном случае мы рассмотрели бы сопряженное отображение $w = \overline{f(z)}$; далее, очевидно, достаточно показать, что в этих условиях данное отображение является внутренним в любом круге $\mathfrak{d}$, $\overline{\mathfrak{d}} \subset \mathfrak{D}$.

---

[1]) Напомним, что такое множество может быть и плотным на плоскости.

Но образ множества $\overline{\mathfrak{b}} \cap \mathfrak{P}$ замкнут на плоскости w, и следовательно, в силу 3) он должен быть нигде не плотным, а отсюда на основании теоремы 8 и следует высказанное утверждение.

Мы закончим этот параграф следующей простой леммой:

Лемма 25. *Пусть в области* $\mathfrak{D}$ *расположено некоторое совершенное и нигде не плотное множество* $\mathfrak{P}$ *и пусть непрерывное в* $\mathfrak{D}$ *отображение* $w = f(z)$ *является внутренним в окрестности каждой точки дополнения* $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$[1]. *Тогда, если образ* $\mathfrak{P}_1$ *множества* $\mathfrak{P}$ *содержит некоторый круг* $\mathfrak{K}$, *то существует множество* $\mathfrak{E}$ *всюду второй категории в* $\mathfrak{K}$, *такое, что каждой точке* $w' \in \mathfrak{E}$ *соответствует при данном отображении бесконечное множество точек* $\{z'_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *дополнения* $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P} : f(z'_n) = w'$.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{F}_p$ множество точек на плоскости w, каждой из которых соответствует не более чем p точек дополнения $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$[2]; тогда

$$\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_p \subset \ldots$$

Каждое из множеств $\mathfrak{F}_p$ замкнуто на плоскости, так как легко показать, что его дополнение открыто. Покажем теперь, что в условиях леммы каждое $\mathfrak{F}_p$ нигде не плотно в круге $\mathfrak{K}$.

Предполагая противное, найдем множество $\mathfrak{F}_p$, содержащее некоторый круг $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}$. Пусть точке $w_0 \in \mathfrak{K}_0$ соответствует максимальное возможное число N точек $\{z_n\}$ $(n = 1, \ldots, N)$ из $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ среди всех точек $\mathfrak{K}_0$; ясно, что $N \leqslant p$.

Построим теперь такие окрестности $\mathfrak{U}(z_n)$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ точек z_n в $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$, чтобы образ каждой из них являлся фиксированным кругом $\mathfrak{k}(w_0) \subset \mathfrak{K}_0$ с центром w_0 и чтобы

$$\overline{\mathfrak{U}(z_n)} \subset \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N); \tag{5}$$

возможность такого построения легко следует из свойств внутренних отображений.

---

[1] Для различных точек $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ характер ориентации при этом отображении может быть неодинаков.

[2] Точки ветвления считаем кратными.

Но по условию значение w_0 принимается функцией $f(z)$ в некоторой точке $z_0 \in \mathfrak{P}$, а так как $\mathfrak{P}$ нигде не плотно и, в силу (5), z_0 лежит вне $\bigcup\limits_{n=1}^{N} \overline{\mathfrak{U}(z_n)}$, то существует последовательность точек $\{z'_m\}$, $z'_m \in \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, сходящихся к z_0. В силу непрерывности $f(z)$ образы $w'_m = f(z'_m)$ этих точек, начиная с некоторого m, попадут внутрь круга $\mathfrak{k}(w_0)$; это означает, что если w'_m одна из таких точек, то ей в $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ должно соответствовать по меньшей мере $N+1$ точек из $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$, что противоречит определению точки w_0 и числа N.

Полученное противоречие и доказывает, что каждое из множеств $\mathfrak{F}_p$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ нигде не плотно в круге $\mathfrak{K}$. Тогда множество $\bigcup\limits_{p=0}^{\infty} \mathfrak{F}_p$ — первой категории в $\mathfrak{K}$, и следовательно, дополнение $\mathfrak{E} = \mathfrak{K} \setminus \bigcup\limits_{p=0}^{\infty} \mathfrak{F}_p$ — всюду второй категории в $\mathfrak{K}$. Из определения $\mathfrak{F}_p$ легко следует, что множество $\mathfrak{E}$ является искомым.

Лемма 25 доказана.

В связи с этой леммой отметим лишь, что если в ее условиях $\mathfrak{D}$ — расширенная плоскость, а $f(z)$ — ограниченная функция, сохраняющая ориентацию всюду вне $\mathfrak{P}$, то образом всей плоскости явится некоторый двумерный континуум $\mathfrak{D}_1$, причем множество $\mathfrak{E}$ указанного выше типа — всюду второй категории на $\mathfrak{D}_1$.

Если же в последних условиях $\mathfrak{P}$ — произвольное замкнутое множество, то можно утверждать лишь, что все значения, которые функция $f(z)$ принимает вне $\mathfrak{P}$, т. е. в $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$, она принимает и на $\mathfrak{P}$ (ср. [44]).

Простейшие примеры подобных функций дают интегралы вида

$$f(z) = \int\limits_{\mathfrak{P}}\int \frac{\varphi(\zeta)\, d\omega_\zeta}{\zeta - z},$$

где $\varphi(\zeta) \in L_p(\mathfrak{P})$, $p > 2$.

§ 3. Отображения, однолистные на нигде не плотном множестве

Из теоремы 8 мы выведем следующее утверждение, которое чаще всего будем использовать в дальнейшем:

Теорема 9. *Пусть в области* $\mathfrak{D}$ *расположено произвольное совершенное нигде не плотное множество* $\mathfrak{P}$ *и пусть непрерывная в* $\mathfrak{D}$ *функция* $f(z)$ *является аналитической в каждой точке (открытого) дополнения* $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ *и однолистной на* $\mathfrak{P}$[1].

Тогда отображение $w = f(z)$ *является внутренним в* $\mathfrak{D}$ *и, в частности, найдется точка множества* $\mathfrak{P}$, *в окрестности которой* $f(z)$ *однолистна.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 8, не ограничивая общности, можно предположить, что функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 9 в замкнутой области $\overline{\mathfrak{D}}$.

Открытое множество $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ распадается на некоторое множество компонент — областей $\mathfrak{D}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, в каждой из которых $f(z)$ является аналитической функцией.

Так как в различных граничных точках такой компоненты, принадлежащих $\mathfrak{P}$, $f(z)$ не принимает равных значений, то в каждой из областей $\mathfrak{D}^{(k)}$ имеем

$$f(z) \not\equiv \mathrm{const}.$$

В самом деле, в противном случае в одной из областей $\mathfrak{D}^{(k)}$ имели бы $f(z) \equiv \mathrm{const}$; эта область $\mathfrak{D}^{(k)}$ не могла бы совпадать с $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$, так как иначе было бы $f(z) \equiv \mathrm{const}$ во всей области и, в частности, на множестве $\mathfrak{P}$, чего не может быть. Но это значит, что граница $\mathfrak{D}^{(k)}$ относительно области $\mathfrak{D}$ должна содержать континуум — очевидно, принадлежащий множеству $\mathfrak{P}$, — на котором в силу непрерывности $f(z)$ должно быть $f(z) \equiv \mathrm{const}$; это же противоречит нашему условию.

Из доказанного, следует, что в каждой области $\mathfrak{D}^{(k)} \subset \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ отображение $w = f(z)$ является внутренним и, очевидно, сохраняющим ориентацию во всех ее точках.

---

[1] См. определение 1 главы 1.

Далее, так как $f(z)$ однолистна на совершенном нигде не плотном множестве $\mathfrak{P}\subset\overline{\mathfrak{D}}$, то его образ $\mathfrak{P}_1=f(\mathfrak{P})$ при отображении $w=f(z)$ есть также нигде не плотное совершенное множество на плоскости w[1]; ясно при этом, что континууму на $\mathfrak{P}$ топологически соответствует континуум на $\mathfrak{P}_1$.

Отсюда на основании теоремы 8 и следует наше утверждение.

Теорема 9 доказана.

Приведем еще одно утверждение для функций, однолистных на множестве. Введем следующую функцию:

$$B(z)=x+i\,|y| \quad \text{при} \quad |z|<1$$

или, что то же,

$$B(z)=\begin{cases} z & \text{при} \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0, \\ \bar{z} & \text{при} \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0, \end{cases} \qquad |z|<1.$$

Это — некоторое видоизменение примера, данного Г. Бором (см. [22]); функцию $B(z)$ назовем функцией Бора.

Докажем следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть в области $\mathfrak{D}$ расположено некоторое совершенное и нигде не плотное множество $\mathfrak{P}$ и пусть непрерывная в $\mathfrak{D}$ функция $w=f(z)$ однолистна на $\mathfrak{P}$, причем ни одна точка множества $\mathfrak{D}\setminus\mathfrak{P}$ не имеет образа на $\mathfrak{P}_1=f(\mathfrak{P})$.*

Если в каждой компоненте открытого множества $\mathfrak{D}\setminus\mathfrak{P}$ либо функция $f(z)$, либо ей сопряженная $\overline{f(z)}$ является аналитической и если имеются компоненты как первого, так и второго рода, то существует аналитическая дуга $\Lambda\subset\mathfrak{P}$, в окрестности которой функция $f(z)$ конформно-эквивалентна функции Бора, т. е.

$$f(z)=\psi\,\{B\,[\Psi(z)]\},$$

где ψ, Ψ — однолистные и аналитические функции.

Доказательство. Прежде всего, как и в теореме 8, имеем $f(z)\not\equiv\text{const}$ в каждой компоненте $\mathfrak{D}\setminus\mathfrak{P}$; отсюда следует, что никакой континуум в $\mathfrak{D}$ не сводится в точку при отображении $w=f(z)$.

---

[1] Это следует из теоремы о сохранении области при топологическом отображении (см., например, [43]).

Но в условиях нашей теоремы это отображение не является внутренним в области $\mathfrak{D}$, так как внутреннее отображение либо во всех точках области сохраняет ориентацию, либо меняет ее на противоположную.

Поэтому применимы все рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 8 (кроме последнего вывода), и, как и там, найдем жорданову область $\mathfrak{d}$, замкнутую жорданову кривую $\gamma\subset\mathfrak{d}$ и множество $\mathfrak{e}\subset\gamma$ всех точек, соответствующих точкам множества $\mathfrak{P}_1 = f(\mathfrak{P})$ со следующими свойствами:

1) $\mathfrak{e}$ всюду разрывно на γ и дополнение $\gamma\setminus\mathfrak{e}\subset\mathfrak{d}\setminus\mathfrak{P}$;

2) в некоторой окрестности каждой дуги на γ, смежной с множеством $\mathfrak{e}$, отображение $w = f(z)$ однолистно;

3) найдутся две дуги γ_1, γ_2, смежные к множеству $\mathfrak{e}$, такие, что образ замкнутых дуг $\overline{\gamma}_1$ и $\overline{\gamma}_2$ есть одна и та же простая дуга $\overline{\Gamma}_0$ некоторой окружности Γ. При этом полный прообраз дуги Γ_0 в $\mathfrak{d}$ состоит из конечного числа дуг попарно без общих внутренних точек;

4) найдутся две области $\mathfrak{g}_1'$, $\mathfrak{g}_2'$ внутри γ, примыкающие к дугам γ_1, γ_2 вдоль соответственных дуг γ_1', γ_2', в каждой из которых отображение $w = f(z)$ однолистно, причем $f(\mathfrak{g}_1') = f(\mathfrak{g}_2')$ и внутри $\mathfrak{g}_1'$ это отображение сохраняет ориентацию, а внутри $\mathfrak{g}_2'$ меняет ее на противоположную. При этом образы областей $\mathfrak{g}_1'$ и $\mathfrak{g}_2'$ расположены внутри окружности Γ.

Далее можно считать, что

5) образ области, ограниченной кривой γ, расположен внутри круга $\mathfrak{B}(w_0)$, обладающего свойством e) (см. стр. 89).

В самом деле, так как центр w_0 круга $\mathfrak{B}$ и окружности Γ принадлежит множеству $\mathfrak{P}_1$, то ему соответствует единственная точка в области $\mathfrak{D}$, принадлежащая $\mathfrak{P}$; вспоминая построение кривой γ, легко выводим, что окружность Γ можно выбрать столь малого радиуса, чтобы образ всей области, ограниченной этой кривой (которая может и не совпадать с компонентой $\mathfrak{g}$), был расположен внутри круга $\mathfrak{B}$.

Так как концы дуг γ_1 и γ_2 отображаются, очевидно, в концы дуги Γ_0, которые принадлежат $\mathfrak{P}_1$, то в условиях теоремы 10 дуги γ_1, γ_2 просто имеют общие концы z', $z''\in\mathfrak{P}$. В силу свойства 3) отсюда следует, что объединение $\gamma_1\cup\gamma_2$ есть замкнутая жорданова кривая, которая, очевидно, совпадает с кривой γ; область, ограниченную этой кривой, обозначим (γ_1, γ_2).

Покажем сначала, что в области (γ_1, γ_2) нет больше точек, соответствующих точкам дуги Γ_0.

По свойству 3) полный прообраз дуги Γ_0 в $\mathfrak{D}'$ состоит из конечного числа простых дуг γ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, которые в силу условия теоремы имеют общие концы $z', z'' \in \mathfrak{P}$. Пусть в области (γ_1, γ_2) расположена одна-единственная дуга γ_3, — доказательство будет аналогичным и в случае, если их больше; рассмотрим области (γ_1, γ_3) и (γ_2, γ_3).

Каждая из этих областей содержит точки множества $\mathfrak{P}$. В противном случае в одной из них, пусть (γ_1, γ_3), функция $f(z)$ или $\overline{f(z)}$ была бы аналитической, но тогда образ области (γ_1, γ_3) при отображении $w = f(z)$ имел бы границу, принадлежащую дуге $\overline{\Gamma}_0 = f(\overline{\gamma}_1) = f(\gamma_3)$, что невозможно, так как простая дуга не разбивает плоскости.

Очевидно, области $\mathfrak{g}_1'$ и $\mathfrak{g}_2'$ расположены соответственно в областях (γ_1, γ_3) и (γ_2, γ_3). Возьмем точки $z_1 \in \mathfrak{g}_1'$ и $z_2 \in \mathfrak{g}_2'$ такие, что

$$f(z_1) = f(z_2);$$

такие точки будем называть соответствующими. Внутри (γ_1, γ_2) соединим некоторой ломаной точку z_1 с произвольной точкой из $\mathfrak{P}$; первую точку пересечения этой ломаной с $\mathfrak{P}$ обозначим $\tilde{z}$. При движении вдоль ломаной $\overline{z_1\tilde{z}}$ внутри области (γ_1, γ_3) соответствующая точка будет перемещаться также внутри области (γ_2, γ_3). В самом деле, образ ломаной $\overline{z_1\tilde{z}}$ без концевой точки $\tilde{z}$ есть некоторая кривая, не пересекающая ни $\mathfrak{P}_1 = f(\mathfrak{P})$, ни $\overline{\Gamma}_0$; поэтому в силу свойства 5) прообраз этой кривой, состоящий из конечного числа непрерывных кривых, не имеет общих точек с дугами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Итак, при движении точки внутри (γ_1, γ_3) вдоль ломаной $\overline{z_1\tilde{z}}$ соответствующая ей точка в (γ_2, γ_3) перемещается вдоль некоторой непрерывной кривой. Конец этой кривой должен соответствовать $\tilde{z}$, но по условию такой точкой может быть только сама точка $\tilde{z}$. Но так как γ_3 разбивает область (γ_1, γ_2), то указанная кривая должна пересекать дугу γ_3, что по построению невозможно.

Мы фактически показали, что, кроме дуг γ_1, γ_2, в области $\mathfrak{d}$ вообще нет точек, соответствующих дуге Γ_0.

Обозначим расположенные внутри γ компоненты множества $\mathfrak{d} \setminus \mathfrak{P}$, содержащие области $\mathfrak{g}_1'$ и $\mathfrak{g}_2'$, соответственно через $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. Как и выше, убеждаемся, что в области (γ_1, γ_2) содержатся точки $\mathfrak{P}$; из свойств $\mathfrak{g}_1'$ и $\mathfrak{g}_2'$ ясно, что внутри $\mathfrak{g}_1$ аналитической является функция $f(z)$, а внутри $\mathfrak{g}_2$ — сопряженная ей функция $\overline{f(z)}$. Отсюда следует, что множество $\mathfrak{P}$ даже разбивает область (γ_1, γ_2). Из предыдущего следует также такое свойство областей $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$: пути $\overline{z_1\tilde{z}} \subset \mathfrak{g}_1$ с концом $\tilde{z} \in \mathfrak{P}$ соответствует некоторый непрерывный путь $\overline{z_2\tilde{z}} \subset \mathfrak{g}_2$ с концом в той же точке.

Отсюда сразу следует, что области $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ односвязны; в самом деле, если бы, например, внутри замкнутой кривой $l \subset \mathfrak{g}_1$ находились точки $\mathfrak{P}$, то пути $\overline{z_1\tilde{z}} \subset \mathfrak{g}_1$ с концом $\tilde{z} \in \mathfrak{P}_1$, лежащим внутри l, должен был бы соответствовать непрерывный путь $\overline{z_2\tilde{z}} \subset \mathfrak{g}_2$, т. е. $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ должны были бы пересекаться, что невозможно.

Из свойства 5) легко следует, что

$$f(\mathfrak{g}_1) = f(\mathfrak{g}_2).$$

Отсюда вытекает, что последовательности точек области $\mathfrak{g}_1$, сходящихся к некоторой точке $\mathfrak{P}$, соответствует в $\mathfrak{g}_2$ последовательность точек, сходящихся к той же точке $\mathfrak{P}$. Поэтому все точки $\mathfrak{P}$ в области (γ_1, γ_2) являются общими граничными точками односвязных областей $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$.

Покажем теперь, что общей границей этих областей является простая дуга $\Lambda \subset \mathfrak{P}$ с концами z', z''; для доказательства воспользуемся теорией простых концов.

Пусть $\bar{z} \in \mathfrak{P}$ — произвольная граничная точка области $\mathfrak{g}_1$ (а потому и области $\mathfrak{g}_2$), принадлежащая некоторому простому концу η этой области. В силу одной теоремы Каратеодори [см. [46]) найдется точка $\tilde{z}_1 \in \eta$ такая, что η определяется поперечными сечениями, принадлежащими окружностями с центром в $\bar{z}_1$, радиусы которых стремятся к нулю. Пусть

$$\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n', \ldots$$

— дуги этих окружностей, являющиеся поперечными сечениями области $\mathfrak{g}_1$. Каждой дуге λ_n' в области $\mathfrak{g}_2$ соответствует некоторая кривая λ_n'',

$$\lambda_1'',\ \lambda_2'',\ \ldots,\ \lambda_n'',\ \ldots,$$

с теми же концами на общей границе областей $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. Отсюда следует, что простой конец η лежит внутри одной из областей, ограниченных кривыми λ_n', λ_n''. Но так как все точки дуги λ_n' стремятся к точке $\tilde{z}_1$, то и кривые λ_n'' должны стремиться к той же точке; это значит, в частности, что $\tilde{z}_1 \equiv \tilde{z}_1$.

Отсюда следует, что простые концы областей $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, принадлежащие $\mathfrak{P}$, содержат лишь по одной точке, являющейся, очевидно, достижимой для обеих областей, т. е. общая их граница является некоторой простой дугой $\Lambda \subset \mathfrak{P}$.

В силу равенства $f(\mathfrak{g}_1) = f(\mathfrak{g}_2)$, свойства 5), а также в силу однолистности $f(z)$ в окрестности дуг γ_1, γ_2 получим, что над каждой точкой $f(z')$, $z' \in \mathfrak{g}_1$ (или $\mathfrak{g}_2$), расположено ровно две точки, принадлежащие поверхностям $\{F\}$; другими словами, внутри каждой из областей $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ отображение $w = f(z)$ является однолистным вплоть до границы [1].

Следовательно, $\mathfrak{G} = f(\mathfrak{g}_1) = f(\mathfrak{g}_2)$ есть жорданова область плоскости w, ограниченная дугой Γ_0 и дугой $\Lambda_1 = f(\Lambda) \subset \mathfrak{P}_1$. По предыдущему, в области $\mathfrak{G}$ определены отображения $z = \varphi_1(w)$ и $z = \varphi_2(w)$ соответственно на области $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$, являющиеся «обратными» для $w = f(z)$.

Отобразим конформно область $\mathfrak{G}$ на верхний единичный полукруг

$$|\omega| < 1, \quad \operatorname{Im} \omega > 0,$$

плоскости ω посредством аналитической функции

$$w = \psi(\omega),$$

причем так, чтобы дуге Λ_1 соответствовал диаметр полукруга; отобразив, далее, единичный круг $|\zeta| < 1$ плоскости ζ на полукруг $|\omega| < 1$, $\operatorname{Im} \omega > 0$ при помощи функции Бора

$$\omega = B(\zeta),$$

---

[1] Это легко следует также из взаимной однозначности отображения на границе.

рассмотрим функции

$$z = \varphi_1\psi\,[B(\zeta)], \quad \operatorname{Im}\zeta > 0, \tag{6}$$

$$z = \varphi_2\psi\,[B(\zeta)], \quad \operatorname{Im}\zeta < 0. \tag{7}$$

Это — аналитические функции соответственно в верхнем и нижнем полукруге единичного круга $|\zeta| < 1$; аналитичность второй из них следует из того, что она является суперпозицией однолистных конформных отображений, из которых одно — первого рода, а два других — второго рода.

Очевидно, функция (6) конформно отображает верхний полукруг $|\zeta| < 1$, $\operatorname{Im}\zeta > 0$, на область $\mathfrak{g}_1$, а функция (7) конформно отображает полукруг $|\zeta| < 1$, $\operatorname{Im}\zeta < 0$, на область $\mathfrak{g}_2$; так как все рассматриваемые области — жордановы, то функции (6) и (7) непрерывны вплоть до границы.

Но так как приближению изнутри $\mathfrak{g}_1$ к граничной точке из Λ соответствует приближение изнутри $\mathfrak{g}_2$ к той же точке, то функции (6) и (7) имеют одинаковые значения на диаметре $\operatorname{Im}\zeta = 0$ круга $|\zeta| < 1$ и, следовательно, являются аналитическими продолжениями одна другой в этом круге, т. е. соответствие между z и ζ является однолистным и аналитическим: $\zeta = \Psi(z)$. Общая граница $\Lambda \subset \mathfrak{P}$ областей $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ как аналитический образ прямолинейного диаметра есть простая аналитическая дуга.

Отображения $z = \varphi_1(w)$ и $z = \varphi_2(w)$ являются обратными для отображения $w = f(z)$, поэтому из (6) и (7) следует, что

$$f(z) = \psi\,[B(\zeta)] = \psi\,\{B\,[\Psi(z)]\},$$

т. е. функция $f(z)$ в наших условиях конформно-эквивалента функции Бора; другими словами, это означает, что существуют конформные отображения первоначальной области $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \cup \Lambda \cup \mathfrak{g}_2$ на единичный круг плоскости ζ и ее образа $f(\mathfrak{g})$ на верхний единичный полукруг плоскости ω такие, что соответствие между точками ζ и ω, индуцируемое отображением $w = f(z)$, будет осуществлять функция Бора

$$\omega = B(\zeta).$$

Теорема 10 доказана.

Не известно, является ли условие этой теоремы

$$f(\mathfrak{P}) \cap f(\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}) = 0$$

необходимым для ее справедливости.

ГЛАВА 4

ПРОИЗВОЛЬНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Отображения с постоянным растяжением

Обобщим сначала понятие прямого отображения на случай неоднолистных функций (ср. § 4 главы 1). Для наших целей будет пригодно следующее весьма общее определение.

Рассмотрим какую-либо точку z_0 области $\mathfrak{D}$, в которой задана непрерывная функция $w = f(z)$, и образ этой точки $w_0 = f(z_0)$ в плоскости w. Точку z_0 назовем U-точкой отображения $w = f(z)$, если существуют две последовательности $\{z'_i\}$, $\{z''_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ точек, сходящиеся к z_0, с полукасательными t', t'' в точке z_0, лежащими на различных прямых, и таких, что все точки $w'_i = f(z'_i)$, $w''_i = f(z''_i)$ отличны от $w_0 = f(z_0)$. Скажем далее, что отображение $w = f(z)$ является *прямым* в U-точке z_0, если последовательности $\{w'_i\}$, $\{w''_i\}$ имеют в точке w_0 полукасательные T', T'' со следующим свойством: если $0 < \{t'\widehat{,}t''\} < \pi$ и угол $\{t'\widehat{,}t''\}$ отсчитывается в положительном направлении от t', то $0 \leqslant \{T'\widehat{,}T''\} < \pi$ при отсчете от T'.

Нетрудно показать, что это определение действительно является более общим, чем определение, данное в § 4 главы 1, а также в [48].

Общую теорему Бора можно теперь сформулировать следующим образом:

Теорема 11. *Пусть в области $\mathfrak{D}$ задано произвольное непрерывное отображение $w = f(z)$, обладающее постоянным растяжением*[1] *в каждой точке, исключая не более чем счетное их множество, и пусть почти*

---

[1] В смысле определения 5 главы 2.

в каждой U-точке, если таковые имеются, это отображение является прямым.

Тогда функция $f(z)$ аналитична внутри области $\mathfrak{D}$, при этом если U-точек не существует, то $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в $\mathfrak{D}$.

Для доказательства приведем сначала некоторые леммы.

Прежде всего, так же как и для случая однолистных функций с постоянным растяжением (см. леммы 8, 9), установим следующую лемму.

Лемма 26. *В условиях теоремы* 11 *функция $f(z)$ моногенна почти всюду в области $\mathfrak{D}$.*

В самом деле, вспоминая доказательство леммы 8 и 9, замечаем, что в нашем случае достаточно доказать следующее: *если функция $\overline{f(z)}$ моногенна в некоторой точке z_0 и $\overline{f}'(z_0) \neq 0$, то z_0 есть U-точка, причем любым последовательностям $\{z_i'\}$, $\{z_i''\} \rightarrow z_0$ с полукасательными t', t'', $0 < \{t'\hat{,}t''\} < \pi$, соответствуют последовательности $\{w_i'\}$, $\{w_i''\} \rightarrow w_0$ с полукасательными T', T'' такими, что* $\{T'\hat{}T''\} = \{t'\hat{,}t''\}$. Это в свою очередь следует из того, что в наших условиях

$$\Delta\overline{f} = \overline{f(z)} - \overline{f(z_0)} = \overline{f}'(z_0)\,[1 + \varepsilon(z)\,]\,\Delta z,$$

где $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$. Возьмем окрестность z_0 так, чтобы $|\varepsilon(z)| < \frac{1}{2}$; отсюда уже ясно, что z_0 есть U-точка отображения $w_1 = \overline{f(z)}$. На основании леммы 5 это отображение является конформным первого рода (в точке z_0), откуда и следует нужный нам результат. Из него вытекает, что отображение $w = f(z)$ не может быть прямым в точке z_0, по нашему определению, а это завершает доказательство леммы 26.

Как и в § 1 главы 2, представляем область $\mathfrak{D}$ в виде суммы замкнутых множеств

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{k,\,n} \mathfrak{D}_n^{(k)} \bigcup \mathfrak{H}, \qquad k = 1,\ 2,$$

где $\mathfrak{H}$ — не более чем счетное множество, входящее в формулировку теоремы 11.

Имеет место

Лемма 27. *В условиях теоремы* 11 *существует открытое всюду плотное в области* $\mathfrak{D}$ *множество* $\mathfrak{O}$, *в каждой точке которого функция* $f(z)$ *является аналитической.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную область $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{D}$; обозначая пересечение $\mathfrak{d}$ с множеством $\mathfrak{D}_n^{(k)}$ ($k = 1, 2;\ n = 1, 2, 3, \ldots$) через $\mathfrak{d}_n^{(k)}$, очевидно, получаем

$$\mathfrak{d} = \bigcup_{k, n} \mathfrak{d}_n^{(k)} \cup \mathfrak{h},$$

где $\mathfrak{h} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{d}$ — не более чем счетное множество. Отсюда следует, что сумма всех $\mathfrak{d}_n^{(k)}$ как дополнение к $\mathfrak{h}$ является множеством всюду второй категории в области $\mathfrak{d}$ (приложение, § 1). Поэтому найдется круг $\mathfrak{d}' \subset \mathfrak{d}$, в котором одно из множеств $\mathfrak{d}_n^{(1)}$ и $\mathfrak{d}_n^{(2)}$ всюду плотно; но так как эти множества замкнуты (в $\mathfrak{d}$), то круг $\mathfrak{d}'$ просто содержится в одном из множеств $\mathfrak{d}_n^{(1)}$ и $\mathfrak{d}_n^{(2)}$.

Пусть $\mathfrak{d}'$ содержится в некотором множестве $\mathfrak{d}_n^{(1)}$ ($n = 1, 2, \ldots$); выберем диаметр этого круга меньшим $\frac{1}{n}$. Тогда из определения множества $\mathfrak{d}_n^{(1)}$ следует, что

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant n\,|z_2 - z_1|$$

для всех $z_1, z_2 \in \mathfrak{d}'$; так как, очевидно, выполнены все условия леммы 11, то $f(z)$ является аналитической в круге $\mathfrak{d}'$.

Пусть теперь $\mathfrak{d}'$ содержится в множестве $\mathfrak{d}_n^{(2)}$; взяв диаметр круга $\mathfrak{d}'$ меньшим $\frac{1}{n}$, мы в силу определения $\mathfrak{d}_n^{(2)}$ получим

$$|f(z_2) - f(z_1)| \geqslant \frac{1}{n}\,|z_2 - z_1|$$

для всех $z_1, z_2 \in \mathfrak{d}'$. Следовательно, функция $f(z)$ однолистна в круге $\mathfrak{d}'$. Поэтому в силу теоремы 3 внутри $\mathfrak{d}'$ аналитической будет либо функция $f(z)$, либо сопряженная ей функция $\overline{f(z)}$. Последнее же в наших условиях не может иметь места, так как на основании леммы 26 функция $f(z)$ моногенна почти всюду в $\mathfrak{d}'$.

Итак, в обоих случаях в любой области $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{D}$ найдется круг $\mathfrak{d}'$, внутри которого функция $f(z)$ является аналитической. Совокупность всех таких кругов составляет, очевидно, открытое всюду плотное множество $\mathfrak{O}$ в области $\mathfrak{D}$.

Лемма 27 доказана.

Докажем теперь теорему 11.

Доказательство теоремы 11. Предположим, что утверждение этой теоремы неверно; тогда найдется непустое совершенное множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$ всех точек, в которых функция $f(z)$ не является аналитической. Из леммы 27 следует, что $\mathfrak{P}$ нигде не плотно в $\mathfrak{D}$.

Пересечение множества $\mathfrak{P}$ с множеством $\mathfrak{D}_n^{(k)}$ обозначим через $\mathfrak{P}_n^{(k)}$ $(k = 1, 2;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ясно, что каждое множество $\mathfrak{P}_n^{(k)}$ замкнуто в $\mathfrak{D}$ и что

$$\mathfrak{P} = \bigcup_{k,n} \mathfrak{P}_n^{(k)} \bigcup \mathfrak{h}',$$

где $\mathfrak{h}'$ не более чем счетно. Сумма всех $\mathfrak{P}_n^{(k)}$ как дополнение к $\mathfrak{h}'$ является множеством всюду второй категории на совершенном множестве $\mathfrak{P}$. Поэтому найдется порция его $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}'$ $(\overline{\mathfrak{D}}' \subset \mathfrak{D}$ — некоторый круг), на которой одно из множеств $\mathfrak{P}_n^{(1)}$ и $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ всюду плотно, т. е., как и выше, $\mathfrak{P}'$ совпадает с одним из этих множеств внутри $\mathfrak{D}'$.

Пусть $\mathfrak{P}'$ совпадает с некоторым множеством $\mathfrak{P}_n^{(1)}$ внутри круга $\mathfrak{D}'$; диаметр этого круга выберем меньшим $\frac{1}{n}$. В силу определения множества $\mathfrak{P}_n^{(1)}$

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant n\,|z_2 - z_1|$$

для всех $z_1, z_2 \in \mathfrak{P}'$.

Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(z) = f(z) + 2nz.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$n\,|z_2 - z_1| \leqslant |\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| \leqslant 3n\,|z_2 - z_1| \qquad (1)$$

для всех $z_1, z_2 \in \mathfrak{P}'$. Это, в частности, означает, что функция $\Phi(z)$ однолистна на нигде не плотном множестве $\mathfrak{P}'$, а потому в силу теоремы 9 ее можно считать однолистной и в круге $\mathfrak{D}' \supset \mathfrak{P}'$. Так как функция $\Phi(z) = f(z) + 2nz$ почти всюду моногенна в $\mathfrak{D}'$ (лемма 26), то, как и в § 1 главы 2, легко докажем суммируемость производной $\Phi'(z)$ [1]. Отсюда и из (1) в силу леммы 11 следует аналитичность функции $\Phi(z)$, а вместе с тем и функции $f(z)$, всюду внутри круга $\mathfrak{D}'$ и, в частности, на $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, что по предположению невозможно.

Пусть теперь $\mathfrak{P}'$ совпадает в $\mathfrak{D}'$ с некоторым множеством $\mathfrak{P}_n^{(2)}$; предполагая снова, что диаметр $\mathfrak{D}'$ меньше $\frac{1}{n}$, получим

$$|f(z_2) - f(z_1)| \geqslant \frac{1}{n} |z_2 - z_1|$$

для любых $z_1, z_2 \in \mathfrak{P}'$. Следовательно, функция $f(z)$ однолистна на $\mathfrak{P}'$; поэтому в силу теоремы 9 можно считать $f(z)$ однолистной в круге $\mathfrak{D}' \supset \mathfrak{P}'$. Но тогда по теореме 3 функция $f(z)$ должна быть аналитической всюду в $\mathfrak{D}'$, что опять-таки противоречиво.

Итак, множество $\mathfrak{P}$ должно быть пустым, т. е. функция $f(z)$ является аналитической всюду в области $\mathfrak{D}$.

Приведенное доказательство остается в силе и для случая, когда U-точек в области $\mathfrak{D}$ нет; но единственной аналитической функцией без U-точек является постоянная.

Теорема 11 доказана.

Тот же метод доказательства позволяет получить обобщение теоремы Коши — Гурса, которое можно сформулировать следующим образом:

Непрерывная функция $f(z)$, имеющая в каждой точке области $\mathfrak{D}$ определенную производную $f'(z)$, конечную или бесконечную, является аналитической всюду внутри $\mathfrak{D}$.

Если на отображение $w = f(z)$, обладающее постоянным растяжением, не накладывать никаких ограничений, то теорема 11 перестает быть верной, как показывает пример функции Бора (глава 3):

$$w = B(z) = x + i|y|; \quad |z| < 1, \quad z = x + iy.$$

Но и для общего случая можно привести некоторые теоремы. Мы докажем следующее предложение.

Теорема 12. *Пусть $w = f(z)$ — непрерывное отображение области $\mathfrak{D}$, обладающее постоянным*

---

[1] Можно воспользоваться также леммой 21 (Д. Е. Меньшов).

растяжением

$$\rho(z)=\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|\leqslant\infty$$

в каждой точке $z\in\mathfrak{D}$, исключая не более чем счетное их множество.

Если $\rho(z)$ может равняться нулю разве лишь на счетном множестве точек, то существует открытое всюду плотное в области $\mathfrak{D}$ множество $\mathfrak{O}$, в каждой компоненте которого либо функция $f(z)$, либо ей сопряженная $\overline{f(z)}$ является аналитической, причем на дополнительном совершенном множестве $\mathfrak{P}=\mathfrak{D}\setminus\mathfrak{O}$ (если оно не пусто) существует всюду плотная на $\mathfrak{P}$ не более чем счетная совокупность аналитических дуг, вблизи каждой точки которых функция $f(z)$ конформно-эквивалентна функции Бора.

Доказательство. Так как

$$\mathfrak{D}_n^{(2)}=\underset{z}{\mathfrak{D}}\left\{\left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}\right|\geqslant\frac{1}{n};\ |z'-z|<\frac{1}{n}\right\},$$

то из условий теоремы следует

$$\mathfrak{D}=\bigcup_n\mathfrak{D}_n^{(2)}\bigcup\mathfrak{H},$$

где $\mathfrak{H}$ — не более чем счетное множество точек.

Рассмотрим произвольную область $\mathfrak{d}\subset\mathfrak{D}$ и пересечения ее $\mathfrak{d}_n^{(2)}$ с замкнутыми множествами $\mathfrak{D}_n^{(2)}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$; тогда

$$\mathfrak{d}=\bigcup_n\mathfrak{d}_n^{(2)}\bigcup\mathfrak{h},\quad \mathfrak{h}\ \text{не более чем счетно.}$$

Как и при доказательстве теоремы 11, найдем круг $\mathfrak{d}'\subset\mathfrak{d}$, в котором функция $f(z)$ однолистна, и следовательно, в силу теоремы 3 внутри $\mathfrak{d}'$ либо функция $f(z)$, либо ей сопряженная $\overline{f(z)}$ оказывается аналитической.

Итак, в любой области $\mathfrak{d}\subset\mathfrak{D}$ найдется круг, внутри которого аналитической функцией является либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$. Совокупность всех таких кругов и составит открытое всюду плотное в $\mathfrak{D}$ множество $\mathfrak{O}$.

Пользуясь методом, сходным с аналитическим продолжением, нетрудно показать, что компоненты множества $\mathfrak{O}$ можно считать максимальными по отношению к свойству функций $f(z)$ и $\overline{f(z)}$ быть аналитическими при неизменной функции $f(z)$ в области $\mathfrak{D}$.

Рассмотрим нигде не плотное совершенное множество $\mathfrak{P} = \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{O}$ и покажем, что если оно не пусто, то в любой окрестности каждой точки $\mathfrak{P}$ находятся точки аналитичности как функции $f(z)$, так и функции $\overline{f(z)}$.

Если бы это было не так, то в определенной окрестности U некоторой точки $z \in \mathfrak{P}$ находились бы точки аналитичности либо только функции $f(z)$, либо только функции $\overline{f(z)}$. Пусть для определенности имеет место первый случай (второй сводится к нему операцией сопряжения).

Обозначая замкнутые множества $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}_n^{(2)}$ через $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), получим

$$\mathfrak{P} = \bigcup_n \mathfrak{P}_n^{(2)} \bigcup \mathfrak{h}', \quad \mathfrak{h}' \text{ не более чем счетно.}$$

Теперь, как и в теореме 11, найдем содержащий точки $\mathfrak{P}$ круг $U' \subset U$, внутри которого функция $f(z)$ однолистна, а потому в силу теоремы 3 всюду внутри U' либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$ является аналитической. Так как, по нашему предположению, внутри U' находятся точки аналитичности лишь функции $f(z)$, то именно $f(z)$ аналитична в круге U', который содержит точки $\mathfrak{P}$. Но это противоречит максимальности компонент множества $\mathfrak{O}$ по отношению к свойствам аналитичности либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$.

Возьмем теперь произвольную порцию $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{d}$ множества $\mathfrak{P}$, где $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{D}$ — круг. Обозначая замкнутые множества $\mathfrak{p} \bigcap \mathfrak{D}_n^{(2)}$ через $\mathfrak{p}_n^{(2)}$, имеем $\mathfrak{p} = \bigcup\limits_n \mathfrak{p}_n^{(2)} \bigcup \mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_1$ не более чем счетно.

Обычным путем находим порцию $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \bigcap \mathfrak{d}'$ ($\mathfrak{d}' \subset \mathfrak{d}$ — круг), которая внутри $\mathfrak{d}'$ совпадает с одним из множеств $\mathfrak{p}_n^{(2)}$; взяв диаметр круга $\mathfrak{d}'$ меньшим $\frac{1}{n}$, получим

$$\left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| \geqslant \frac{1}{n}$$

для любой точки $z \in \mathfrak{p}'$ и любого $z' \in \mathfrak{d}'$. Отсюда следует, что $f(z)$ однолистна на $\mathfrak{p}'$, причем ни одна точка множества $\mathfrak{d}' \setminus \mathfrak{p}'$ не имеет образа на $\mathfrak{p}'_1 = f(\mathfrak{p}')$.

Поэтому в силу теоремы 10 внутри $\mathfrak{d}'$ найдется аналитическая дуга, принадлежащая $\mathfrak{P}$, вблизи которой функция $f(z)$ конформно-эквивалентна функции Бора.

Продолжая максимально каждую из найденных дуг в области $\mathfrak{D}$ с сохранением этого локального свойства, мы таким образом получим, очевидно, не более, чем счетную систему аналитических дуг, которая по доказанному выше всюду плотно расположена на множестве $\mathfrak{P}$.

Теорема 12 доказана.

Не известно, является ли условие $\rho(z) > 0$ (за исключением счетного множества точек) в этой теореме существенным хотя бы для ее первого утверждения. Если бы это было так, то существовала бы в некоторой области $\mathfrak{D}$ непрерывная функция $f(z)$ со следующими свойствами:

1) $f(z)$ удовлетворяет в $\mathfrak{D}$ условию Липшица

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant L\,|z_2 - z_1|$$

для любых $z_1, z_2 \in \mathfrak{D}$;

2) отображение $w = f(z)$ обладает постоянным растяжением $\rho(z)$ в каждой точке $\mathfrak{D}$, исключая не более чем счетное их множество;

3) для точек z некоторого множества всюду второй категории в $\mathfrak{D}$ имеет место $\rho(z) = 0$;

4) в области $\mathfrak{D}$ существуют два всюду плотных множества $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, любая порция каждого из которых имеет положительную плоскую меру, причем в каждой точке $z \in \mathfrak{E}_1$ функция $f(z)$ (соответственно в каждой точке $z \in \mathfrak{E}_2$ сопряженная функция $\overline{f(z)}$) является моногенной и $f'(z)$ (соответственно $\overline{f}'(z)$) отлична от нуля.

Но существование подобной функции $f(z)$ кажется сомнительным.

Кроме функции Бора, приведем еще некоторые примеры функций, удовлетворяющих условиям теоремы 12.

Возьмем на отрезке $[0, 1]$ оси Oy произвольное совершенное разрывное множество точек $\mathfrak{p}$ и обозначим совокупность всех его смежных интервалов через $\{\delta_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

В каждом интервале δ_n построим концентрический ему интервал ε_n такой, чтобы

$$\frac{\varepsilon_n}{\delta_n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию

$$g(y) = \begin{cases} -1 & \text{при } y \in \varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \\ +1 & \text{при остальных } y \in [0, 1]. \end{cases}$$

Из (2) следует, что $g(y)$ асимптотически непрерывна в каждой точке отрезка $[0, 1]$, за исключением лишь концов интервалов ε_n, где она, очевидно, терпит разрыв первого рода. Отсюда и из ограниченности функции $g(y)$ вытекает, что функция

$$S(y) = \int\limits_0^y g(y)\,dy$$

имеет в каждой точке отрезка $[0, 1]$ производные числа, равные лишь ± 1, причем вблизи каждой точки $y \in \mathfrak{p}$ находятся точки, в которых производные числа — разных знаков.

Возьмем теперь функцию

$$f(z) = x + is(y)$$

в квадрате $\mathfrak{D}\,(0 < x < 1;\ 0 < y < 1)$.

На основании указанных дифференциальных свойств функции $S(y)$ легко показать, что в каждой точке

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| = 1.$$

Множество $\mathfrak{P} = \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{O}$ состоит здесь из точек $z = x + iy$ квадрата $\mathfrak{D}$, для которых либо $y \in \mathfrak{p}$, либо y является одним из концов интервала ε_n $(n = 1, 2, \ldots)$, причем последние и составляют плотную на $\mathfrak{P}$ систему аналитических дуг (в данном случае прямолинейных интервалов), о которых идет речь в теореме 12.

Взяв множество $\mathfrak{p}$ на отрезке $[0, 1]$ положительной линейной меры, мы, очевидно, получим исключительное множество $\mathfrak{P}$ положительной плоской меры.

§ 2. Отображения со свойством K''

Здесь мы докажем следующую теорему.

Теорема 13. *Пусть в области $\mathfrak{D}$ задано произвольное непрерывное отображение $w=f(z)$, обладающее свойством K'' в каждой точке, исключая не более чем счетное их множество, и пусть почти в каждой U-точке, если таковые имеются, это отображение является прямым.*

Тогда функция $f(z)$ является аналитической в области $\mathfrak{d}$; при этом если U-точек не существует, то $f(z)\equiv\text{const}$ в $\mathfrak{D}$.

Доказательство. Покажем сначала, что в условиях теоремы существует открытое всюду плотное в области $\mathfrak{D}$ множество $\mathfrak{O}$, в каждой точке которого $f(z)$ аналитична.

Возьмем произвольную замкнутую область $\bar{\mathfrak{d}}\subset\mathfrak{D}$. По лемме 13 найдется такой круг $\mathfrak{d}'\subset\mathfrak{d}$, что

$$|f(z_2)-f(z_1)|<L|z_2-z_1|$$

для произвольных z_1, $z_2\in\mathfrak{d}'$ (L — постоянная). Отсюда следует, в частности, что почти всюду в $\mathfrak{d}'$ функция $f(z)$ имеет полный дифференциал; как и в лемме 9, это приводит к моногенности $f(z)$ почти всюду в $\mathfrak{d}'$. В силу леммы 11 функция $f(z)$ аналитична внутри $\mathfrak{d}'\subset\mathfrak{d}$.

Учитывая произвольность области $\mathfrak{d}\subset\mathfrak{D}$, отсюда получаем, что точки аналитичности $f(z)$ заполняют всюду плотное в $\mathfrak{D}$ открытое множество $\mathfrak{O}$.

Предположим теперь, что теорема 13 неверна; тогда найдется непустое совершенное множество $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{D}$ всех точек, в которых функция $f(z)$ не является аналитической. Из предыдущего следует, что $\mathfrak{P}$ нигде не плотно в $\mathfrak{D}$.

По лемме 13 находим порцию $\mathfrak{P}'=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{D}'$ ($\mathfrak{D}'$ — некоторый круг) такую, что

$$|f(z_2)-f(z_1)|<L|z_2-z_1|$$

для любых z_1, $z_2\in\mathfrak{P}'$ (L — постоянная); в силу леммы 16 можно считать, что почти всюду на $\mathfrak{P}'$ функция $f(z)$ имеет полный дифференциал, откуда, снова как в лемме 9, следует, что почти всюду в $\mathfrak{D}'$ функция $f(z)$ моногенна.

Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(z)=f(z)+2Lz;$$

из последнего неравенства следует, что

$$L\,|z_2 - z_1| < |\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| < 3L\,|z_2 - z_1|$$

для всех $z_1, z_2 \in \mathfrak{P}'$. Как и в предыдущем параграфе, легко докажем, что функция $\Phi(z)$, а вместе с ней и $f(z)$, является аналитической всюду внутри $\mathfrak{D}' \supset \mathfrak{P}'$, что противоречит определению множества $\mathfrak{P}$.

Теорема 13 доказана.

Если не накладывать на отображение $w = f(z)$ никаких ограничений, теорема 13 оказывается неверной, что показывают примеры предыдущего параграфа.

§ 3. Обобщение теоремы Д. Е. Меньшова

В главе 2 (§ 3) для однолистных функций $f(z)$ была введена величина

$$H(z_0, r) = \max_{z', z'' \in C(z_0, r)} \left| \frac{f(z') - f(z_0)}{f(z'') - f(z_0)} \right|,$$

где $C(z_0, r)$ — окружность $|z - z_0| = r$.

В отличие от однолистных функций эта величина, вообще говоря, теряет смысл для произвольной непрерывной функции $f(z)$, так как может обращаться в бесконечность или даже оказаться неопределенной. Но для некоторых функций, в том числе и аналитических, величина $H(z_0, r)$ всегда имеет смысл, по крайней мере если ограничиваться некоторой окрестностью соответствующей точки z_0.

Здесь мы и рассмотрим лишь такие непрерывные функции $f(z)$, для которых $H(z, r)$ всегда имеет смысл, и выясним, для каких функций этого класса имеет место соотношение $H(z, r) \to 1$ при $r \to 0$ в каждой точке области (исключая не более чем счетное их множество). Сделаем еще такое очевидное замечание: если величина $H(z, r)$ для достаточно малых r имеет смысл и конечна, то точка z является U-точкой отображения $w = f(z)$.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 14. *Пусть для непрерывного отображения $w = f(z)$ области $\mathfrak{D}$ величина $H(z, r)$ имеет смысл и при достаточно малых r конечна в каждой точке z (исключая не более чем счетное их множество),* *причем почти в каждой U-точке это отображение является прямым.*

Тогда если

$$\lim_{r\to 0} H(z,\ r)=1$$

во всех точках $z\in\mathfrak{D}$, за исключением конечного или счетного множества, то $f(z)$ является аналитической функцией всюду внутри $\mathfrak{D}$, причем $f(z)\not\equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Мы сначала покажем, что в наших условиях имеет место утверждение леммы 19. Для этого достаточно доказать замкнутость множества $\mathfrak{C}_n\subset\mathfrak{D}$ всех точек $z\in\mathfrak{D}$, для которых

$$H(z,\ r)\leqslant 1+\varepsilon$$

для всех r, $0<r\leqslant\frac{1}{n}$.

Пусть $z_k\in\mathfrak{C}_n$ и $z_k\to z_0\in\mathfrak{D}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. Возьмем на окружности

$$C(z_0,\ r):|z-z_0|=r\ \left(0<r /\!\!\wedge \frac{1}{n}\right)$$

две произвольные точки z', z''. На окружностях $C(z_k,\ r)$ того же радиуса r выберем по две точки z'_k, z''_k так, чтобы $z'_k\to z_k$ и $z''_k\to z_k$. Тогда

$$\left|\frac{f(z'_k)-f(z_k)}{f(z''_k)-f(z_k)}\right|\leqslant 1+\varepsilon \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Если бы имело место $f(z'')=f(z_0)$, то, переходя в этих неравенствах к пределу[1], мы получили бы, что и $f(z')=f(z_0)$, т. е. на окружности $C(z_0,\ r)$ функция $f(z)$ принимала бы одно и то же значение $f(z_0)$. Так как разве лишь для счетного множества величина $H(z,\ r)$ не имеет смысла (или бесконечна), то на окружности $C(z_0,\ r)$ найдется точка $\tilde{z}$, для которой $H(\tilde{z},\ r)$ имеет смысл и конечна, но этого не может быть, так как в любой окрестности $\tilde{z}$ находятся точки окружности $C(z_0,\ r)$, а в них значения функции $f(z)$ равны значению $f(\tilde{z})=f(z_0)$.

---

[1] Избавившись сначала от дроби.

Поэтому должно быть $f(z'') \neq f(z_0)$, и в предыдущих неравенствах возможен предельный переход при $k \to \infty$, что дает

$$\left|\frac{f(z')-f(z_0)}{f(z'')-f(z_0)}\right| \leqslant 1+\varepsilon,$$

т. е. $H(z_0, r)$ имеет смысл и не превосходит $1+\varepsilon$, что и требовалось.

Применяя лемму 19, покажем, что в условиях теоремы 14 существует открытое всюду плотное в $\mathfrak{D}$ множество $\mathfrak{O}$ точек аналитичности функции $f(z)$.

Возьмем произвольную замкнутую область $\overline{\mathfrak{d}} \subset \mathfrak{D}$; по лемме 19 найдется такой круг $\mathfrak{d}' \subset \mathfrak{d}$, что

$$H(z, r) < 2 \tag{3}$$

для всех $z \in \mathfrak{d}'$ и всех r, $0 < r \leqslant \sigma$, где σ — постоянная. Предполагая диаметр круга $\mathfrak{d}'$ меньшим σ, мы в силу (3) и определения величины $H(z, r)$ заключаем, что внутри $\mathfrak{d}'$ функция $f(z)$ не принимает равных значений, т. е. однолистна. По теореме 6 внутри $\mathfrak{d}'$ будет аналитической либо функция $f(z)$, либо ей сопряженная $\overline{f(z)}$. Если бы аналитической была $\overline{f(z)}$, то из конформности отображения $w_1 = \overline{f(z)}$ (первого рода) всюду в $\mathfrak{d}'$ следовало бы, что отображение $w = f(z)$ не может быть прямым ни в какой точке $\mathfrak{d}'$ (являющейся, очевидно, U-точкой), что противоречит нашему предположению. Поэтому аналитической в $\mathfrak{d}'$ является функция $f(z)$. Из произвольности $\mathfrak{d} \supset \mathfrak{d}'$ и следует, что открытое множество $\mathfrak{O}$ точек аналитичности $f(z)$ всюду плотно в $\mathfrak{D}$.

Предположим теперь, что теорема 14 неверна; тогда существует совершенное нигде не плотное множество $\mathfrak{P}$, в каждой точке которого $f(z)$ не является аналитической.

По лемме 19 находим порцию $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}$ (где $\mathfrak{D}'$—круг) такую, что

$$H(z, r) < 2$$

для всех $z \in \mathfrak{P}'$ и всех r, $0 < r \leqslant \sigma$.

Снова предполагая диаметр $\mathfrak{D}'$ меньшим σ, как и выше, получим, что на $\mathfrak{P}'$ функция $f(z)$ однолистна, поэтому в силу теоремы 9 можно считать, что $f(z)$ однолистна в круге $\mathfrak{D}'$. По теореме 6 в круге $\mathfrak{D}'$ является аналитической либо функция $f(z)$, либо сопряженная ей функция $\overline{f(z)}$; но второе невозможно, так как $\mathfrak{D}'$ содержит точки аналитичности функции $f(z)$. Следовательно, $f(z)$ аналитична внутри $\mathfrak{d}' \supset \mathfrak{P}'$, что противоречиво.

Теорема 14 доказана. Заметим, что уже из ее доказательства видно, что $f(z) \not\equiv \text{const}$.

Примеры, приведенные в § 1 настоящей главы, показывают, что если не требовать сохранения ориентации в точках области, теорема 14 перестает быть верной. Но оказывается, что в самом общем случае всегда имеет место утверждение теоремы 12.

Итак, докажем следующее предложение.

Теорема 15. *Пусть для непрерывного отображения $w = f(z)$ области $\mathfrak{D}$ величина $H(z, r)$ имеет смысл и конечна в каждой точке z (при достаточно малых r), исключая не более чем счетное их множество.*

Тогда если

$$\lim_{r \to 0} H(z, r) = 1$$

во всех точках $z \in \mathfrak{D}$, за исключением их конечного или счетного множества, то существует открытое всюду плотное в области $\mathfrak{D}$ множество $\mathfrak{O}$, в каждой компоненте которого либо функция $f(z)$, либо ей сопряженная $\overline{f(z)}$ является аналитической. Если при этом дополнительное (совершенное) множество $\mathfrak{P} = \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{O}$ не пусто, то существует плотная на $\mathfrak{P}$ не более чем счетная совокупность аналитических дуг, вблизи каждой точки которых функция $f(z)$ конформно эквивалентна функции Бора.

Доказательство. Возьмем произвольную замкнутую область $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{D}$. Так как лемма 19 справедлива в наших условиях (см. доказательство теоремы 14), то, как и выше, найдется круг $\mathfrak{d}' \subset \mathfrak{d}$, в котором функция $f(z)$ оказывается однолистной, а потому (в силу теоремы 6) внутри $\mathfrak{d}'$ либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$ является аналитической функцией.

Таким образом, существует открытое всюду плотное в $\mathfrak{D}$ множество $\mathfrak{O}$, в каждой компоненте которого либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$ является аналитической функцией.

Если дополнительное множество $\mathfrak{P} = \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{O}$ не пусто, то, как и в теореме 12 (ср. также доказательство теоремы 14), можно считать, что в любой окрестности каждой точки $\mathfrak{P}$

находятся точки аналитичности как функции $f(z)$, так и функции $\overline{f(z)}$.

Возьмем теперь произвольную порцию $\mathfrak{p}_0=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{d}_0$ множества $\mathfrak{P}$, где $\overline{\mathfrak{d}}_0\subset\mathfrak{D}$ — круг. По лемме 19 существует порция $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}_0\cap\mathfrak{d}'$ ($\mathfrak{d}'\subset\mathfrak{d}_0$ — круг), для всех точек $z\in\mathfrak{p}'$ которой будем иметь

$$H(z,\ r)<2 \tag{4}$$

при всех r, $0<r\leqslant\sigma$ (σ — постоянная). Предполагая диаметр $\mathfrak{d}'$ меньшим σ и взяв произвольные точки $z_0\in\mathfrak{d}'$ и $z'\in\mathfrak{d}'$, мы в силу (4) легко получим, что $f(z_0)\neq f(z')$. Это означает, что $f(z)$ однолистна на $\mathfrak{p}'$, причем ни одна точка множества $\mathfrak{d}'\setminus\mathfrak{p}'$ не имеет образа на $\mathfrak{p}_1'=f(\mathfrak{p}')$.

Применяя теперь теорему 10, мы, как и при доказательстве теоремы 12, завершим доказательство.

Теорема 15 доказана.

§ 4. Конформные отображения

Здесь мы докажем следующую теорему.

Теорема 16. *Пусть $w=f(z)$ — произвольное непрерывное отображение области $\mathfrak{D}$, являющееся конформным первого рода в каждой ее точке, исключая не более чем счетное их множество. Тогда $f(z)$ есть аналитическая функция внутри области $\mathfrak{D}$.*

Для доказательства приведем некоторые леммы.

Лемма 28. *В условиях теоремы 16 функция $f(z)$ моногенна почти всюду в области $\mathfrak{D}$.*

Доказательство. В самом деле, из леммы 5 следует, что множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ для каждой точки $z\in\mathfrak{D}$, исключая не более чем счетное их множество, расположено на луче T_z плоскости ζ и, следовательно, не является полной плоскостью. Поэтому, в силу теоремы 2, множества $\mathfrak{M}_z$ почти для всех $z\in\mathfrak{D}$ являются отдельными конечными точками, так как ясно, что они не могут быть и окружностями. Но это и означает моногенность функции $f(z)$ почти всюду в $\mathfrak{D}$.

Лемма 28 доказана.

Более важным для нас явится другое предложение, которое мы сформулируем даже в несколько более общем виде.

Лемма 29. *Пусть $w=w(z)$ — непрерывное однолистное отображение области $\mathfrak{d}$ плоскости z на область $\mathfrak{d}_1$*

плоскости w. *Если в каждой точке* $z \in \mathfrak{d}$, *исключая не более чем счетное их множество, множество моногенности* $\mathfrak{M}_z$ *функции* $w(z)$ *есть собственное подмножество некоторой прямой*[1]) *на плоскости* ζ, *то обратная функция* $z = z(w)$ *моногенна почти всюду в* $\mathfrak{d}_1$.

Доказательство. Множества моногенности $\mathfrak{M}_w$ однолистной функции $z = z(w)$ получаются из соответствующих $\mathfrak{M}_z$ преобразованием $\omega = \frac{1}{\zeta}$. Поэтому из условий леммы следует, что каждое из $\mathfrak{M}_w$ есть собственное подмножество прямой или окружности на плоскости ω, исключая множества моногенности $\mathfrak{M}_w$ для конечного или счетного множества точек $w \in \mathfrak{d}_1$. Как и выше, отсюда снова следует, что почти для всех $w \in \mathfrak{d}_1$ множества $\mathfrak{M}_w$ суть отдельные конечные точки, т. е. функция $z(w)$ моногенна почти всюду в $\mathfrak{d}_1$.

Конечно, прямая функция $f(z)$ является также моногенной почти всюду (в области $\mathfrak{d}$).

Лемма 29 доказана.

Лемма 30. *В условиях теоремы* 16 *существует открытое всюду плотное в* $\mathfrak{D}$ *множество* $\mathfrak{O}$ *точек аналитичности функции* $f(z)$.

Доказательство. Введем множества

$$\mathfrak{D}_n^{(1)},\ \mathfrak{D}_n^{(2)} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где

$$\mathfrak{D}_n^{(j)} = \underset{z}{\mathfrak{D}}\left\{\left|\frac{f(z') - f(z)}{z' - z} + (-1)^j\right| \geqslant \frac{1}{2};\quad |z' - z| < \frac{1}{n}\right\}.$$

Как и в главе 1, легко показать, что каждое из множеств $\mathfrak{D}_n^{(1)}$ и $\mathfrak{D}_n^{(2)}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ замкнуто (в $\mathfrak{D}$). Далее, из условий теоремы 16 следует, что

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{j,\,n} \mathfrak{D}_n^{(j)} \bigcup \mathfrak{H} \qquad (j = 1,\ 2), \tag{5}$$

где $\mathfrak{H}$ не более чем счетно. В самом деле, множество $\bigcup\limits_{n} \mathfrak{D}_n^{(j)}$ содержит точки $z \in \mathfrak{D}$, для которых множества моногенности $\mathfrak{M}_z$ не пересекаются с кругом $|\zeta + (-1)^j| < \frac{1}{2}$

---

[1]) То есть не содержащее всех точек этой прямой.

$(j=1,\ 2)$; но так как в наших условиях каждое $\mathfrak{M}_z$, $z\in\mathfrak{D}\setminus\mathfrak{H}$, принадлежит некоторому лучу T_z с началом $\zeta=0$, то отсюда и вытекает (5).

Рассмотрим вспомогательные функции

$$w_1(z)=f(z)-z,$$
$$w_2(z)=f(z)+z;$$

очевидно, что при $z\in\mathfrak{D}_n^{(j)}$ $(j=1,\ 2)$ и $z'\in\mathfrak{D}$ имеем

$$\left|\frac{w_j(z')-w_j(z)}{z'-z}\right|\geqslant\frac{1}{2} \tag{6}$$

при $|z'-z|<\frac{1}{n}$. Отсюда, как обычно (ср. § 2 главы 1), следует, что в $\frac{1}{2n}$-окрестности каждой точки $z\in\mathfrak{D}_n^{(j)}$ функция $w_j(z)$ однолистна на соответствующей порции множества $\mathfrak{D}_n^{(j)}$.

Возьмем произвольную область $\overline{\mathfrak{d}}\subset\mathfrak{D}$; обозначая пересечение $\mathfrak{d}$ с замкнутым множеством $\mathfrak{D}_n^{(j)}$ $(j=1,\ 2;\ n=1,\ 2,\ 3\ldots)$ через $\mathfrak{d}_n^{(j)}$, очевидно, получим

$$\mathfrak{d}=\bigcup_{j,\ n}\mathfrak{d}_n^{(j)}\bigcup\mathfrak{h},$$

где $\mathfrak{h}=\mathfrak{H}\cap\mathfrak{d}$ не более чем счетно. Но сумма всех $\mathfrak{d}_n^{(j)}$ как дополнение к $\mathfrak{h}$ является множеством второй категории в $\mathfrak{d}$. Поэтому найдется круг $\mathfrak{d}'\subset\mathfrak{d}$, в котором одно из множеств $\mathfrak{d}_n^{(j)}$ $(j=1,\ 2;\ n=1,\ 2,\ \ldots)$ всюду плотно; но так как эти множества замкнуты (в $\mathfrak{d}$), то круг $\mathfrak{d}'$ просто принадлежит некоторому множеству $\mathfrak{d}_n^{(j)}$.

Выберем диаметр круга $\mathfrak{d}'$ меньшим $\frac{1}{n}$; тогда из (6) следует, что функция $w_j(z)$ является однолистной в $\mathfrak{d}'$. Следовательно, образ $\mathfrak{d}_j'=w_j(\mathfrak{d}')$ области $\mathfrak{d}'$ есть также область в плоскости w_j.

Так как

$$\frac{\Delta w_j}{\Delta z}=\frac{\Delta f}{\Delta z}\pm 1,$$

то множества моногенности $\mathfrak{M}_z'$ для функций $w_1(z)$, $w_2(z)$ получаются из соответствующих множеств $\mathfrak{M}_z$ функции $f(z)$

сдвигом на ± 1, а потому суть собственные подмножества некоторых прямых: ведь $\mathfrak{M}_z \subset \mathrm{T}_z$, где T_z — лучи.

На основании леммы 29 заключаем, что обратная функция $z = z(w_j)$ ($j = 1, 2$) моногенна почти всюду в области $\mathfrak{d}'_j$. Из неравенства (6) следует, далее, что при w'_j, $w_j \in \mathfrak{d}'_j$

$$\left| \frac{z(w'_j) - z(w_j)}{w'_j - w_j} \right| \leqslant 2.$$

В силу леммы 11 функция $z(w_j)$ является аналитической в области $\mathfrak{d}'_j$, а вместе и обратная ей функция $w_j(z)$ является аналитической в круге $\mathfrak{d}'$.

Но $f(z) = w_j(z) \mp z$, поэтому в $\mathfrak{d}' \subset \mathfrak{d}$ аналитической оказывается и первоначальная функция $f(z)$. Так как область $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{D}$ была выбрана произвольно, то отсюда и следует утверждение леммы.

Докажем теперь теорему 16.

Доказательство теоремы 16. Предположим, что утверждение теоремы неверно; тогда найдется совершенное множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$ всех точек, в которых функция $f(z)$ не является аналитической. Из леммы 30 следует, что $\mathfrak{P}$ нигде не плотно в $\mathfrak{D}$.

Пересечение множества $\mathfrak{P}$ с множеством $\mathfrak{D}^j_n$ обозначим через $\mathfrak{P}^{(j)}_n$ ($j = 1, 2$; $n = 1, 2, 3, \ldots$); каждое множество $\mathfrak{P}^{(j)}_n$ замкнуто в $\mathfrak{D}$ и

$$\mathfrak{P} = \bigcup_{j,\,n} \mathfrak{P}^{(j)}_n \bigcup \mathfrak{h}',$$

где $\mathfrak{h}'$ не более чем счетно. Сумма всех $\mathfrak{P}^{(j)}_n$ как дополнение к $\mathfrak{h}'$ является множеством второй категории на совершенном множестве $\mathfrak{P}$. Поэтому найдется порция его $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}'$ ($\mathfrak{D}'$ — некоторый круг), на которой одно из замкнутых множеств $\mathfrak{P}^{(j)}_n$ всюду плотно, т. е. совпадает с $\mathfrak{P}'$.

Предполагая, что диаметр $\mathfrak{D}'$ меньше $\frac{1}{n}$, на основании (6) получим, что функция $w_j(z)$ является однолистной на множестве $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{D}'$; поэтому в силу теоремы 9 можно считать ее однолистной в круге $\mathfrak{D}'$.

Следовательно, образ $\mathfrak{D}'_j = w_j(\mathfrak{D}')$ круга $\mathfrak{D}'$ есть некоторая область в плоскости w_j, а образ $\mathfrak{P}'_j = w_j(\mathfrak{P}')$ есть совершенное нигде не плотное множество в $\mathfrak{D}_j'$. При этом функция $z(w_j)$, обратная к $w_j(z)$, является аналитической в $\mathfrak{D}_j' \setminus \mathfrak{P}_j'$; на основании леммы 29 функция $z(w_j)$ моногенна почти всюду в области $\mathfrak{D}_j'$.

Из неравенства (6) следует, далее, что

$$\left|\frac{z(w_j')-z(w_j)}{w_j'-w_j}\right| \leqslant 2$$

при $w_j \in \mathfrak{P}_j'$ и $w_j' \in \mathfrak{D}_j'$.

Как и в главе 2 (§ 1), нетрудно показать суммируемость производной[1] функции $z(w_j)$ внутри области $\mathfrak{D}_j'$. В силу леммы 11 функция $z(w_j)$ аналитична в $\mathfrak{D}_j'$, а потому и обратная ей функция $w_j(z) = f(z) \mp z$ является аналитической всюду в круге $\mathfrak{D}'$; но тогда и функция $f(z)$ должна быть аналитической всюду в $\mathfrak{D}' \supset \mathfrak{P}'$, что противоречит определению множества $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{P}'$.

Теорема 16 доказана полностью.

Заметим, что нами фактически доказано более сильное утверждение, которое мы сформулируем в виде самостоятельной теоремы.

Теорема 17. *Пусть $w = f(z)$ — произвольное непрерывное отображение области $\mathfrak{D}$.*

Если для каждой точки $z \in \mathfrak{D}$, исключая не более чем счетное их множество, множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ функции $f(z)$ является собственным подмножеством прямой на плоскости ζ[2], то $f(z)$ есть аналитическая функция всюду в области $\mathfrak{D}$.

При доказательстве этой теоремы нужно лишь вместо двух множеств $\bigcup_n \mathfrak{D}_n^{(1)}$ и $\bigcup_n \mathfrak{D}_n^{(2)}$ (см. теорему 16), соответствующих кругам $|\zeta - 1| < \frac{1}{2}$ и $|\zeta + 1| < \frac{1}{2}$, ввести еще множество $\bigcup_n \mathfrak{D}_n^{(3)}$, соответствующее, например, кругу $|\zeta - 2i| < \frac{1}{2}$.

---

[1] Ср. также лемму 21.

[2] При обычной топологии расширенной плоскости комплексного переменного ζ (ср. замечание перед доказательством теоремы 16).

Более общий характер этой теоремы по сравнению с предыдущей следует из того, что выполнение ее условия для некоторой точки $z \in \mathfrak{D}$, вообще говоря, не гарантирует конформности отображения в этой точке, даже если множество $\mathfrak{M}_z$ расположено на луче с началом $\zeta = 0$ (см. выше).

Не известно, верна ли эта теорема, если допускать в качестве $\mathfrak{M}_z$ полные прямые.

Выше мы видели, что конформность в точке не влечет за собой моногенности. В то же время конформность во всех точках области достаточна даже для аналитичности соответствующей функции. В связи с этим можно было бы поставить вопрос: какова структура наиболее «массивных» множеств, конформность в каждой точке которых не связана с моногенностью? В частности, возможно ли это на континуумах, совершенных множествах и т. д. Отметим лишь, что в силу теоремы 2 указанные множества — обязательно плоской меры нуль.

§ 5. Отображения со свойством K'

Докажем сначала некоторые леммы, связанные со свойством K'.

Лемма 31. *Пусть* $w = f(z)$ — *непрерывная в области* $\mathfrak{D}$ *функция и* $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$ — *произвольное совершенное множество. Предположим, что* $f(z)$ *обладает свойством* K' *во всех точках множества* $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{P}$ *не первой категории на* $\mathfrak{P}$.

Тогда найдутся порция $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$ *и числа* $\sigma, \delta > 0$, *такие, что из каждой точки* $z \in \mathfrak{P}'$ *исходят три луча* $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, *обладающие следующими свойствами*:

1) $[\tau_i(z') \,\hat{,}\, \tau_i(z'')] < \sigma$ $(i = 1, 2, 3)$ *для любых точек* z', $z'' \in \mathfrak{P}'$;

2) $800\sigma < [\tau_i(z) \,\hat{,}\, \tau_j(z)] < \pi - 800\sigma$ *при* $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ *для всех точек* $z \in \mathfrak{P}'$;

3) *расстояние множества* $\mathfrak{P}'$ *до границы области* $\mathfrak{D}$ *больше* δ;

4) *существует в плоскости* ζ *фиксированный луч* T *с начальной точкой* $\zeta = 0$, *такой, что угол* Ω_σ *раствора* 2σ *с вершиной* $\zeta = 0$ *и биссектрисой* T *содержит значения отношения* $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ *при* $z + \Delta z \in \tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$

для всех Δz, *удовлетворяющих неравенствам* $0 < |\Delta z| \leqslant \delta$, *и для каждой точки* $z \in \mathfrak{P}'$.

Доказательство. В плоскостях z и ζ фиксируем определенные лучи t и τ соответственно и обозначим через

$$\mathfrak{N}(n_1,\ n_2,\ n_3,\ \nu,\ p,\ q) = \mathfrak{N}(n_i,\ \nu,\ p,\ q)$$

множество точек $z \in \mathfrak{N}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\text{(A)} \qquad \left| \{t \widehat{,} t_i(z)\} - \frac{n_i}{800p} \right| < \frac{1}{800p} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где через $\{t \widehat{,} t_i(z)\}$ обозначена величина угла, отсчитываемого в положительном направлении от t, заключенная между 0 и 2π (включая 0);

$$\text{(Б)} \qquad \frac{8}{p} < [t_i(z) \widehat{,} t_j(z)] < \pi - \frac{8}{p}$$

при $i \neq j$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$;

$$\text{(В)} \qquad \left| \{\tau \widehat{,} \mathrm{T}_z\} - \frac{\nu}{800p} \right| < \frac{1}{800p};$$

угол $\Omega(z)$ с вершиной $\zeta = 0$ раствора $\frac{1}{400p}$ и с биссектрисой T_z содержит значения отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при всех Δz таких, что

$$\text{(Г)}\, 0 < |\Delta z| \leqslant \frac{1}{q} \quad \text{и} \quad z + \Delta z \in t_i(z) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Из определения свойства K' и условий леммы следует, что

$$\bigcup \mathfrak{N}(n_i,\ \nu,\ p,\ q) = \mathfrak{N},$$

где суммирование распространено на всевозможные целые положительные значения чисел n_i, ν, p, q. Так как $\mathfrak{N}$ не первой категории на $\mathfrak{P}$, то найдутся определенные значения n_i, ν, p, q, такие, что соответствующее им множество $\mathfrak{N}(n_i,\ \nu,\ p,\ q)$ будет всюду плотно на некоторой порции $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, причем $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}'$, где $\overline{\mathfrak{D}'} \subset \mathfrak{D}$ — круг. Очевидно, можно предположить, что расстояние от множества $\mathfrak{P}'$ до границы области $\mathfrak{D}$ больше $\frac{1}{q}$.

Для этих чисел положим

$$\mathfrak{N}(n_i, \nu, p, q) = \mathfrak{N}', \qquad \frac{1}{200p} = \sigma, \qquad \frac{1}{q} = \delta.$$

Докажем, что для множества $\mathfrak{P}'$ и так определенных чисел σ, $\delta > 0$ имеют место все свойства, указанные в лемме.

Для этого определим в точках $z \in \mathfrak{P}'$ лучи $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ следующим образом: полагаем $\tau_i(z) = t_i(z)$ для точек $z \in \mathfrak{P}' \cap \mathfrak{N}'$, а для точек $z \in \mathfrak{P}' \setminus \mathfrak{N}'$ в качестве $\tau_i(z)$ возьмем одно из предельных положений лучей $t_i(z')$, когда точки $z' \in \mathfrak{N}'$ сходятся к z; такое определение возможно в силу плотности $\mathfrak{N}'$ на $\mathfrak{P}'$.

Из неравенств (А) следует теперь, что

$$[\tau_i(z')\,\widehat{,}\,\tau_i(z'')] \leqslant \frac{1}{400p} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

для всех точек z', $z'' \in \mathfrak{P}'$, а из неравенств (Б) получим

$$\frac{8}{p} \leqslant [\tau_i(z)\,\widehat{,}\,\tau_j(z)] \leqslant \pi - \frac{8}{p}$$

при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ для всех точек $z \in \mathfrak{P}'$. Из последних неравенств в силу определения числа σ следует, что для лучей $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ выполнены свойства 1) и 2) леммы. Так как расстояние от множества $\mathfrak{P}'$ до границы области $\mathfrak{D}$ больше $\frac{1}{q}$, то имеем также и свойство 3).

Перейдем к доказательству свойства 4).

Возьмем на плоскости ζ в качестве T произвольный луч $\mathrm{T}_{z'}$ для $z' \in \mathfrak{N}'$ и построим угол Ω_σ раствора $\frac{1}{100p} = 2\sigma$ с биссектрисой T (и вершиной $\zeta = 0$); в силу неравенств (В) и (Г) углы $\Omega(z'')$ для всех $z'' \in \mathfrak{N}'$ расположены внутри Ω_σ.

Пусть теперь $z \in \mathfrak{P}' \setminus \mathfrak{N}'$ — произвольная точка и $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное число, удовлетворяющее неравенству $\varepsilon \leqslant \frac{1}{q}$. Обозначим через z_i $(i = 1, 2, 3)$ точку луча $\tau_i(z)$, для которой

$$|z_i - z| = \varepsilon.$$

Если $z' \in \mathfrak{R}'$, то через z'_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ обозначим точку луча $t_i(z')$, для которой

$$|z'_i - z'| = \varepsilon \leqslant \frac{1}{q}.$$

Из (Г) следует, что значения отношений

$$\frac{f(z'_i) - f(z')}{z'_i - z'}$$

лежат в соответствующих углах $\Omega(z')$ и, следовательно, внутри построенного выше угла Ω_σ.

Луч $\tau_i(z)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ есть одно из предельных положений лучей $t_i(z')$, когда z' стремится к z; из предыдущих равенств следует, что точки z'_i стремятся при этом к z_i; поэтому в силу непрерывности $f(z)$ и замкнутости Ω_σ получим, что значения

$$\frac{f(z_i) - f(z)}{z_i - z} \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

принадлежат углу Ω_σ.

Лемма 31 доказана.

Возьмем луч T, определенный в лемме 31, и обозначим

$$\arg \mathrm{T} = \Phi_0;$$

тогда для функции $f_0(z) = e^{-i\Phi_0} f(z)$ будут выполнены все утверждения леммы, если вместо луча T взять положительную полуось T′ действительной оси плоскости ζ, а вместо угла Ω_σ — угол Ω'_σ с биссектрисой T′. Для функции

$$w(z) = f_0(z) + az = e^{-i\Phi_0} f(z) + az \qquad (a > 0 \text{ произвольно})$$

угол Ω'_σ сместится на a; получим угол Ω''_σ. По построению Ω''_σ содержит значения отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $z + \Delta z \in \tau_i(z)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ и для всех Δz, $0 < |\Delta z| \leqslant \delta$, и, в частности,

$$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \left|\frac{w(z+\Delta z) - w(z)}{\Delta z}\right| \geqslant a > 0 \qquad (z \in \mathfrak{P}').$$

Так как $\sigma < \frac{\pi}{1600}$, то Ω''_σ является острым углом и из простых геометрических соображений следует, что

$$-\sigma \leqslant \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} \leqslant \sigma \qquad (\text{при любом } a > 0). \qquad (7)$$

Рассмотрим отображение $w = w(z)$; в соответствующую точке $z \in \mathfrak{P}'$ точку w перенесем параллельно[1]) лучи $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ и построим углы $\Omega_i(w)$ раствора 2σ с вершиной w и соответственными биссектрисами $\tau_i(z)$. Из (7) следует, что относительный поворот образа произвольной точки $z + \Delta z$ луча $\tau_i(z)$ (при $0 < |\Delta z| \leqslant \delta$) не превышает по абсолютной величине числа σ; поэтому образ $L_i(w)$ отрезка луча $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ при $|\Delta z| \leqslant \delta$ полностью расположен в угле $\Omega_i(w)$.

Обозначим через $\mathfrak{P}'_1$ образ множества $\mathfrak{P}'$ при отображении $w = w(z)$; возьмем произвольную точку $w \in \mathfrak{P}'_1$ и соответствующие ей углы $\Omega_i(w)$. Удвоив раствор каждого из этих углов (при тех же биссектрисах $\tau_i(z)$), мы получим тройку углов $\Omega_i(w)$, которые, в силу 1) леммы 31, обладают следующим свойством: если $w' \in \mathfrak{P}'_1$, то тройка углов $\Omega_i(w')$, полученных параллельным переносом углов $\Omega_i(w)$ в точку w', содержит образы $L_i(w')$ отрезков лучей $\tau_i(z')$ $(i = 1, 2, 3)$ длины δ, где $z' \in \mathfrak{P}'$ — произвольная точка, соответствующая точке w'.

Итак, мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 32. *Пусть $w = f(z)$ — непрерывная в области $\mathfrak{D}$ функция и $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$ — произвольное совершенное множество. Предположим, что $f(z)$ обладает свойством K' во всех точках множества $N \subset \mathfrak{P}$ не первой категории на $\mathfrak{P}$.*

Тогда найдутся порция $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$ и числа σ, $\delta > 0$, такие, что из каждой точки $z \in \mathfrak{P}'$ исходят три луча $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, обладающих свойствами:

1) $[\tau_i(z')\widehat{,}\tau_i(z'')] < \sigma$ $(i = 1, 2, 3)$ *для любых точек* z', $z'' \in \mathfrak{P}'$;

2) $800\sigma < [\tau_i(z)\widehat{,}\tau_j(z)] < \pi - 800\sigma$ *при* $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ *для всех точек* $z \in \mathfrak{P}'$;

3) *расстояние от множества $\mathfrak{P}'$ до границы области $\mathfrak{D}$ больше δ;*

4) *функция вида* $w(z) = e^{-i\Phi_0} f(z) + az$ (Φ_0 — *фиксированная постоянная,* $a > 0$ *произвольно*) *на лучах* $\tau_i(z)$

---

[1]) Считая при этом, что оси координат плоскостей z и ζ соответственно параллельны.

($i=1, 2, 3$), $z\in\mathfrak{P}'$, *удовлетворяет неравенствам*

$$\left|\frac{w(z')-w(z)}{z'-z}\right|\geqslant a>0$$

при $z'\in\tau_i(z)$ *и* $|z'-z|\leqslant\delta$;

5) *если* $\mathfrak{P}'_1$ — *образ множества* $\mathfrak{P}'$ *при отображении* $w=w(z)$, *то из каждой точки* $w\in\mathfrak{P}'_1$ *как из вершины исходят три угла* $\Omega_i(w)$ ($i=1, 2, 3$) *раствора* 4σ *каждый, полученных параллельным переносом фиксированной тройки углов* Ω_i *с общей вершиной и обладающих тем свойством, что образ* $L_i(w)$ *отрезка* $\tau_i(z)$ ($i=1, 2, 3$), *имеющего длину* δ, *при отображении* $w=w(z)$ *расположен в угле* $\Omega_i(w)$; *при этом*

$$800\sigma<[\Omega_i\widehat{,}\,\Omega_j]<\pi-800\sigma$$

при $i\neq j$ ($i, j=1, 2, 3$), *если понимать* $[\Omega_i\widehat{,}\,\Omega_j]$ *как угол между биссектрисами углов* Ω_i, Ω_j: *углы* Ω_i *не зависят от* $a>0$.

Приведем здесь же две леммы о свойстве K''', доказательство которых естественно примыкает к предыдущему.

Лемма 33. *Пусть* $w=f(z)$ — *непрерывная в области* $\mathfrak{D}$ *функция и* $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{D}$ — *произвольное совершенное множество. Предположим, что* $f(z)$ *обладает свойством* K''' *во всех точках множества* $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{P}$ *не первой категории на* $\mathfrak{P}$.

Тогда найдутся порция $\mathfrak{P}'\subset\mathfrak{P}$, *числа* σ, $\delta>0$ *и целое* $r>0$, *такие, что из каждой точки* $z\in\mathfrak{P}'$ *исходят два луча* $\tau_i(z)$ ($i=1, 2$), *обладающих следующими свойствами*:

1) $[\tau_i(z')\widehat{,}\,\tau_i(z'')]<\sigma$ ($i=1, 2$) *для любых точек* z, $z''\in\mathfrak{P}'$;

2) $800\sigma<[\tau_1(z)\widehat{,}\,\tau_2(z)]<\pi-800\sigma$ *для всех точек* $z\in\mathfrak{P}'$;

3) $$\left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}\right|<\frac{1}{\sigma}$$

при всех $z'\in\tau_i(z)$ ($i=1, 2$) *таких, что* $|z'-z|\leqslant\delta$;

4) *расстояние множества* $\mathfrak{P}'$ *до границы области* $\mathfrak{D}$ *больше* δ;

5) *существует в плоскости* ζ *фиксированный луч* T *с начальной точкой* $\zeta=0$, *такой, что угол* Ω_σ *рас-*

твора 2σ *с вершиной* $\zeta = 0$ *и биссектрисой* T *содержит значения отношения* $\frac{\Delta w_r}{\Delta z}$ *функции* $w_r(z) = f(z) + rz$ *при* $z + \Delta z \in \tau_i(z)$ $(i = 1, 2)$ *для всех* Δz, *удовлетворяющих неравенствам* $0 < |\Delta z| \leqslant \delta$, *и для каждой точки* $z \in \mathfrak{P}'$.

Доказательство. Обозначим через

$$\mathfrak{N}(n_1, n_2, \nu, p, q, r) = \mathfrak{N}(n_i, \nu, p, q, r)$$

множество точек $z \in \mathfrak{N}$, удовлетворяющих условиям (А), (Б), (В), введенным при доказательстве леммы 31 (беря лишь $i = 1.\ 2$), а также условиям

(Г′) $$\left|\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}\right| < p \quad \text{при всех } z' \in t_i(z)$$

$(i = 1, 2)$ таких, что $|z' - z| \leqslant \frac{1}{q}$.

Угол $\Omega(z)$ раствора $\frac{1}{400p}$ с вершиной $\zeta = 0$ и с биссектрисой T_z содержит значения отношения

$$\frac{\Delta w_r}{\Delta z} = \frac{\Delta f}{\Delta z} + r$$

при всех Δz таких, что

(Д′) $$0 < |\Delta z| \leqslant \frac{1}{q} \quad \text{и} \quad z + \Delta z \in t_i(z) \qquad (i = 1, 2).$$

Так как в точке $z \in \mathfrak{N}$ выполнено свойство K''', то очевидно, что при некоторых целых r и $q > 0$ будем иметь

$$\left|\frac{\Delta w_r}{\Delta z}\right| = \left|\frac{\Delta f}{\Delta z} + r\right| > \frac{r}{2}$$

при $|\Delta z| \leqslant \frac{1}{q}$, $z + \Delta z \in t_i(z)$ $(i = 1, 2)$; в силу свойства K''' отсюда следует, что существует

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta w_r}{\Delta z} \quad \text{при} \quad z + \Delta z \in t_i(z) \qquad (i = 1, 2).$$

Из этого замечания, а также определений свойства K''' и множеств $\mathfrak{N}(n_i, \nu, p, q, r)$ следует, что

$$\bigcup \mathfrak{N}(n_i, \nu, p, q, r) = \mathfrak{N},$$

где суммирование распространено на всевозможные целые положительные значения чисел n_i, ν, p, q, r. Так как $\mathfrak{N}$ — не первой категории на $\mathfrak{P}$, то найдутся определенные значения n_i, ν, p, q, r такие, что соответствующее им множество

$$\mathfrak{N}(n_i, \nu, p, q, r) = \mathfrak{N}'$$

будет всюду плотно на некоторой порции $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$.

Взяв теперь вместо функции $f(z)$ функцию $w_r(z) = f(z) + rz$ и дословно повторяя дальнейшие рассуждения, проводившиеся в лемме 31, придем к утверждению леммы 33.

Так же как из леммы 31 вытекает лемма 32, из доказанной леммы 33 выводится

Лемма 34. *Пусть $w = f(z)$ — непрерывная в области $\mathfrak{D}$ функция и $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$ — произвольное совершенное множество. Предположим, что $f(z)$ обладает свойством K''' во всех точках множества $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{P}$ не первой категории на $\mathfrak{P}$.*

Тогда найдутся порция $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}'$ (где $\mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$ — круг), числа σ, $\delta > 0$ и целое $r > 0$, такие, что из каждой точки $z \in \mathfrak{P}'$ исходят два луча $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2)$, обладающих свойствами:

1) $[\tau_i(z')\widehat{,}\tau_i(z'')] < \sigma$ $(i = 1, 2)$ *для любых точек* z', $z'' \in \mathfrak{P}'$;

2) $800\sigma < [\tau_1(z)\widehat{,}\tau_2(z)] < \pi - 800\sigma$ *для всех точек* $z \in \mathfrak{P}'$;

3)
$$\left|\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}\right| < \frac{1}{\sigma}$$

при всех $z' \in t_i(z)$ $(i = 1, 2)$ *таких, что* $|z' - z| \leqslant \delta$;

4) *расстояние от множества $\mathfrak{P}'$ до границы области $\mathfrak{D}$ больше δ;*

5) *функция вида $w(z) = e^{-i\Phi_0} w_r(z) + az$ при $w_r(z) = f(z) + rz$ (Φ_0 — фиксированная постоянная и $a > 0$ произвольно) на лучах $\tau_i(z)$ ($i = 1, 2$ и $z \in \mathfrak{P}'$) удовлетворяет неравенствам*

$$\left|\frac{w(z') - w(z)}{z' - z}\right| \geqslant a > 0$$

при $z' \in \tau_i(z)$ *и* $|z' - z| \leqslant \delta$;

6) *если $\mathfrak{P}_1'$ — образ множества $\mathfrak{P}'$ при отображении $w = w(z)$, то из каждой точки $w \in \mathfrak{P}_1'$ как из вершины*

исходят два угла $\Omega_i(w)$ ($i=1, 2$) *раствора* 4σ *каждый, полученных параллельным переносом фиксированной пары углов* Ω_1, Ω_2 *с общей вершиной и обладающих тем свойством, что образ* $L_i(w)$ *отрезка* $\tau_i(z)$ ($i=1, 2$), *имеющего длину* δ, *при отображении* $w=w(z)$ *расположен в угле* $\Omega_i(w)$; *при этом*

$$800\sigma < [\Omega_1\widehat{,}\,\Omega_2] < \pi - 800\sigma,$$

если понимать $[\Omega_1\widehat{,}\,\Omega_2]$ *как угол между биссектрисами углов* Ω_1, Ω_2: *углы* Ω_i *не зависят от* $a>0$.

Отметим, что из свойства 2) и из неравенств

$$-\sigma \leqslant \arg\frac{\Delta w}{\Delta z} < \sigma, \quad w(z)=e^{-i\Phi_0}w_r(z)+az,$$

аналогичных неравенствам (7), следует, что направление кратчайшего поворота от $\tau_1(z)$ к $\tau_2(z)$ ($z\in\mathfrak{P}'$) совпадает с направлением кратчайшего поворота от $\Omega_1(w)$ к $\Omega_2(w)$[1].

Вернемся к изучению отображений со свойством K'.

Лемма 35. *В условиях леммы 32 найдется порция* $\mathfrak{P}_0$ *множества* $\mathfrak{P}$, *на которой функция* $w(z)=e^{-i\Phi_0}f(z)+z$ *однолистна* (*в смысле определения* 1 *главы* 1).

Доказательство. По лемме 32 выделяем порцию $\mathfrak{P}'\subset\mathfrak{P}$ с указанными в ней свойствами. Из свойства 4) функции $w(z)$ при $a=1$ следует, что образ $L_i(w)$ отрезка $\tau_i(z)$ ($i=1, 2, 3$) длины δ имеет диаметр $\geqslant\delta$ и расположен в угле $\Omega_i(w)$.

Возьмем произвольную точку $z\in\mathfrak{P}'$ и порцию $\mathfrak{P}_0\subset\mathfrak{P}'$, расположенную в некотором круге с центром в точке z, который можно считать расположенным в концентрическом круге

$$|z'-z| < \frac{1}{2}\delta\sin 700\sigma. \tag{8}$$

Покажем, что на $\mathfrak{P}_0$ функция $w(z)$ однолистна.

Пусть z_1, $z_2\in\mathfrak{P}_0$ и $z_1\neq z_2$; предположим, вопреки утверждению, что

$$w(z_1)=w(z_2)=w_0. \tag{9}$$

Прежде всего, из свойства 4) функции $w(z)$ следует, что ни одна из точек z_1 и z_2 не лежит на каком-либо луче $\tau_i(z_1)$,

---

[1] Это замечание, конечно, справедливо и для леммы 32, но там оно нам не потребуется.

$\tau_i(z_2)$ $(i=1, 2, 3)$, соответствующем другой точке. В самом деле, если бы, например, $z_2 \in \tau_i(z_1)$, то в силу (8)

$$|z_2 - z_1| < \delta \sin 700\sigma < \delta,$$

а потому из свойства 4) функции $w(z)$ (при $a=1$)

$$\left|\frac{w(z_2)-w(z_1)}{z_2-z_1}\right| \geqslant 1$$

и, следовательно, $w(z_2) \neq w(z_1)$.

Итак, если имеет место (9), то каждая из точек z_1 и z_2 лежит внутри угла, образованного лучами $\tau_i(z_1)$, $\tau_i(z_2)$, соответствующими другой точке. Предположим для определенности, что точка z_2 расположена внутри угла, образованного лучами $\tau_1(z_1)$ и $\tau_2(z_1)$.

Повторяя дословно рассуждение леммы 13, найдем, что луч $\tau_3(z_2)$ пересекает одну из сторон этого угла — пусть $\tau_2(z_1)$ — в некоторой точке $\tilde{z}$, причем, учитывая (8), получим

$$\begin{aligned} |z_1 - \tilde{z}| &< \delta, \\ |z_2 - \tilde{z}| &< \delta, \end{aligned} \tag{10}$$

т. е. точка $\tilde{z}$ принадлежит области $\mathfrak{D}$.

Так как по предположению $w(z_1) = w(z_2) = w_0$, то в точке w_0 имеется тройка углов $\Omega_i(w_0)$, в которых расположены образы любых отрезков соответственных лучей $\tau_i(z_1)$ и $\tau_i(z_2)$ длины δ.

Из неравенств (10) следует, что образы отрезков лучей $\tau_2(z_1)$ и $\tau_3(z_2)$ длины, меньшей δ, должны пересекаться в точке $w(\tilde{z}) \neq w_0$, но это невозможно, так как образы этих отрезков расположены в непересекающихся углах $\Omega_2(w_0)$ и $\Omega_3(w_0)$.

Лемма 35 доказана.

Докажем еще две простые леммы.

Лемма 36. *Пусть непрерывное однолистное отображение $z = z(w)$ области $\mathfrak{D}_1$ дифференцируемо в некоторой точке $w_0 \in \mathfrak{D}_1$. Предположим, что из w_0 исходят три простые дуги L_i $(i=1, 2, 3)$, расположенные в некоторых углах Ω_i с единственной общей точкой — вершиной w_0, и таких, что соответствующие им три пары* *вертикальных углов также не пересекаются между собой.*

Тогда, если образы дуг L_i *при отображении* $z = z(w)$ *являются на плоскости* z *кривыми, исходящими из соответствующей точки* z_0 *и с касательными в этой точке, расположенными на различных прямых, то либо якобиан* $J(w)$ *этого отображения в точке* w_0 *отличен от нуля, либо функция* $z(w)$ *моногенна в этой точке и* $z'(w_0) = 0$.

Доказательство. По условию отображение $z = z(w) = x(u, v) + iy(u, v)$ $(w = u + iv)$ вблизи точки w_0 имеет вид (см. приложение, § 3)

$$\Delta z = z_w \Delta w + z_{\bar{w}} \Delta \overline{w} + o(\Delta w),$$

где

$$\Delta w = w - w_0,$$

$$\Delta z = z(w) - z(w_0),$$

$$z_w = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

$$z_{\bar{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Предположим, что якобиан $J(w_0) = 0$, но функция $z(w)$ немоногенна (если бы она была моногенной, то при нашем предположении было бы $z'(w_0) = 0$). Это значит, что

$$|z_w| = |z_{\bar{w}}|,$$

причем $z_w \neq 0$, так как в противном случае функция $z(w)$ была бы моногенной.

Положим

$$z_{\bar{w}} = z_w e^{2i\beta};$$

тогда

$$\Delta z = z_w e^{i\beta}\left(e^{-i\beta} \Delta w + e^{i\beta} \Delta \overline{w}\right) + o(\Delta w).$$

Вводя обозначения

$$\arg\left(z_w e^{i\beta}\right) = \beta_0,$$

$$\Delta w = |\Delta w| e^{i\varphi},$$

получим

$$\Delta z = 2|z_w| \cdot |\Delta w| \cos(\varphi - \beta) e^{i\beta_0} + o(\Delta w). \qquad (11)$$

Проведем через точку $w = w_0$ (т. е. $\Delta w = 0$) прямую L, составленную из лучей

$$\varphi - \beta = \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi - \beta = \frac{3\pi}{2};$$

из условий леммы следует, что L может пересечь разве лишь один из (замкнутых) углов Ω_i ($i = 1, 2, 3$). Следовательно, по крайней мере два из этих углов — пусть Ω_1, Ω_2 — не пересекаются с L; поэтому для точек $\Delta w = |\Delta w| e^{i\varphi}$ каждого из углов Ω_1, Ω_2 величина $\cos(\varphi - \beta)$ сохраняет знак, причем найдется такое $\alpha_0 > 0$, что для этих точек

$$|\cos(\varphi - \beta)| > \alpha_0.$$

Так как $z_w \neq 0$, то отсюда и из (11) следует, что существует предел

$$\lim_{\Delta w \to 0} \operatorname{Arg} \Delta z = \lim_{\Delta w \to 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta z}{|\Delta w|},$$

когда Δw принадлежит одному из углов $\Omega_1 \Omega_2$, причем оба эти предела могут быть равными только числам β_0 и $\beta_0 + \pi$[1]. Это, в частности, означает, что образы кривых L_1, L_2, расположенных в Ω_1, Ω_2, суть кривые с одной и той же касательной прямой, что противоречит условию леммы.

Лемма 36 доказана.

Пример однолистного отображения $z = w|w|$ вблизи точки $w = 0$ показывает, что случай, когда $z'(w_0) = 0$, действительно может представиться. Далее, что число кривых L_i — три — в условиях леммы 36 нельзя уменьшить, показывает пример однолистной функции

$$z(w) = u + iv(u^2 + v^2) \quad \text{при} \quad w = 0.$$

В этом примере оси координат плоскости w переходят в оси координат плоскости z, и в то же время $J(0) = 0$, а $z'(0)$ не существует.

Лемма 37. *Если непрерывная функция $z = z(w)$ однолистна в области $\mathfrak{D}_1$, дифференцируема в точке $w_0 \in \mathfrak{D}_1$ и якобиан $J(w) \neq 0$ в этой точке, то и обратная*

---

[1] С точностью до кратного 2π.

функция $w = w(z)$ дифференцируема в соответствующей точке z_0.

Доказательство. Модули наименьшего и наибольшего из производных чисел функции $z(w)$ в точке w_0 равны соответственно $\left|\,|z_w| - |z_{\bar{w}}|\,\right|$ и $|z_w| + |z_{\bar{w}}|$ (см. теорему 1).

В наших условиях эти числа не равны нулю, так как

$$J = |z_w|^2 - |z_{\bar{w}}|^2 \neq 0;$$

поэтому в некоторой окрестности точки w_0 будем иметь

$$\frac{1}{2}\left|\,|z_w| - |z_{\bar{w}}|\,\right| < \left|\frac{\Delta z}{\Delta w}\right| < 2\left(|z_w| + |z_{\bar{w}}|\right).$$

Отсюда и из однолистности функции $z(w)$ легко следует, что величина $o(\Delta w)$ является величиной $o(\Delta z)$, и наоборот; здесь мы, как и выше, полагаем $\Delta z = z - z_0$, $\Delta w = w - w_0$.

По условию леммы отображение $z = z(w) = x(u, v) + iy(u, v)$ вблизи точки $w_0 = u_0 + iv_0$ имеет вид

$$x - x_0 = \frac{\partial x}{\partial u}(u - u_0) + \frac{\partial x}{\partial v}(v - v_0) + o(\Delta w),$$

$$y - y_0 = \frac{\partial y}{\partial u}(u - u_0) + \frac{\partial y}{\partial v}(v - v_0) + o(\Delta w).$$

Так как $J(w_0) \neq 0$, то, заменяя $o(\Delta w)$ на $o(\Delta z)$, получим

$$u - u_0 = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v}(x - x_0) - \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}(y - y_0) + o(\Delta z),$$

$$v - v_0 = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}(x - x_0) + \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}(y - y_0) + o(\Delta z).$$

Эти равенства и показывают, что обратная функция $w = w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в соответствующей точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

Лемма 37 доказана.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 18. *Пусть $w = f(z)$ — произвольное непрерывное отображение области $\mathfrak{D}$, обладающее свойством K' в каждой точке $z \in \mathfrak{D}$, за исключением не более чем счетного их множества.*

Тогда функция $f(z)$ является аналитической всюду в области $\mathfrak{D}$.

Доказательство. Как и обычно, покажем сначала, что в условиях теоремы существует открытое всюду плотное в $\mathfrak{D}$ множество $\mathfrak{O}$ точек аналитичности функции $f(z)$.

Возьмем произвольную замкнутую область $\bar{\mathfrak{d}} \subset \mathfrak{D}$. По лемме 35 найдем круг $\mathfrak{d}' \subset \mathfrak{d}$, в котором функция вида

$$w(z) = e^{-i\Phi_0} f(z) + z$$

является однолистной и обладает всеми свойствами, перечисленными в лемме 32 (при $a = 1$). Образ круга $\mathfrak{d}$ при однолистном отображении $w = w(z)$ есть некоторая область $\mathfrak{d}_1'$ плоскости w. Из свойств функции $w(z)$ следует, что обратная функция $z = z(w)$ удовлетворяет всем условиям леммы 14, если положить $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{d}_1'$, а в качестве дуг $L_i(w)$ взять образы отрезков длины δ лучей $\tau_i(z)$, $z \in \mathfrak{d}_1'$. В силу этой леммы можно считать, что в области $\mathfrak{d}_1'$ имеет место неравенство

$$|z(w_2) - z(w_1)| < L\,|w_2 - w_1|$$

для любых точек w_1, $w_2 \in \mathfrak{d}_1'$ (L — некоторая постоянная), т. е. функция $z(w)$ в области $\mathfrak{d}_1'$ удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, имеет полный дифференциал почти всюду в $\mathfrak{d}_1'$.

Обозначим через $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{d}'$ множество точек, в которых функция $f(z)$ не обладает свойством K', и через $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{d}_1'$ образ этого множества при отображении $w = w(z)$; $\mathfrak{h}_1$ не более чем счетно.

Возьмем произвольную точку $w_0 \in \mathfrak{d}_1' \setminus \mathfrak{h}_1$, в которой функция $z(w)$ дифференцируема. Так как в силу свойства углов $\mathfrak{L}_i$ ($i = 1, 2, 3$; лемма 32) условия леммы 36 выполнены, то либо $z'(w_0) = 0$, либо якобиан отображения $z = z(w)$ в точке w_0 отличен от нуля. Тогда из леммы 37 следует, что и функция $w(z) = e^{-i\Phi_0} f(z) + z$ дифференцируема в точке $z_0 \in \mathfrak{d}' \setminus \mathfrak{h}$; другими словами, дифференцируемой является и первоначальная функция $f(z)$. Но $f(z)$ в точке $z_0 \in \mathfrak{d}' \setminus \mathfrak{h}$ обладает свойством K', поэтому в силу леммы 7 эта функция моногенна в точке z_0. Отсюда следует моногенность функции $w(z)$ и обратной ей функции $z(w)$ в точке w_0.

Тем самым показано, что функция $z(w)$ удовлетворяет условию Липщица и почти всюду в области $\mathfrak{d}_1'$ моногенна;

в силу леммы 11 она является аналитической всюду в $\mathfrak{d}_1'$. Вместе с ней аналитической являются прямая функция $w(z) = e^{-i\Phi_0}f(z) + z$ в круге $\mathfrak{d}' \subset \mathfrak{d}$ и, очевидно, первоначальная функция $f(z)$.

Так как область $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{D}$ была взята нами произвольно, то отсюда и следует, что точки аналитичности функции $f(z)$ в области $\mathfrak{D}$ образуют всюду плотное и, очевидно, открытое множество $\mathfrak{O}$.

Предположим теперь, что утверждение теоремы 18 неверно; тогда найдется непустое совершенное множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$ всех точек, в каждой из которых функция $f(z)$ не является аналитической. Согласно предыдущему, $\mathfrak{P}$ нигде не плотно в $\mathfrak{D}$.

По лемме 35 находим порцию $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}'$ ($\overline{\mathfrak{D}}' \subset \mathfrak{D}$ — круг), на которой функция вида $w(z) = e^{-i\Phi_0}f(z) + z$ однолистна; в силу теоремы 9 можно считать, что эта функция однолистна в круге $\mathfrak{D}'$.

Через $\mathfrak{D}_1'$ и $\mathfrak{P}_1'$ обозначим образы при отображении $w = w(z)$ круга $\mathfrak{D}'$ и множества $\mathfrak{P}'$; $\mathfrak{D}_1'$ — область, а $\mathfrak{P}_1' \subset \mathfrak{D}_1'$ — нигде не плотное совершенное множество; применяя, как и выше, лемму 14 к обратной функции $z = z(w)$ в $\mathfrak{D}_1'$, можно считать, что для любых точек w_1, $w_2 \in \mathfrak{P}_1'$ имеем

$$|z(w_2) - z(w_1)| < L\,|w_2 - w_1|$$

(L — постоянная).

В силу леммы 17 функцию $z(w)$ можно предположить дифференцируемой почти всюду в $\mathfrak{D}_1'$.

Теперь применимы все предыдущие рассуждения, из которых следует, наконец, что функция $f(z)$ должна быть аналитической всюду в круге $\mathfrak{D}' \supset \mathfrak{P}'$, что противоречит определению множества $\mathfrak{P}$.

Следовательно, $\mathfrak{P}$ пусто и теорема 18 доказана.

Мы приведем еще одно общее утверждение об отображениях, сохраняющих величины углов, допуская теперь возможное изменение направления их отсчета на противоположное.

Тройку *лучей* t_i ($i = 1, 2, 3$), исходящих из одной точки, назовем *развернутой*, если сумма каждых двух углов, образованных этими лучами, всегда больше π, т. е.

$$[t_i \widehat{,}\ t_j] + [t_j \widehat{,}\ t_k] > \pi$$

при $i \neq j \neq k \neq i$ $(i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3)$. Легко видеть, что для того, чтобы тройка лучей t_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ была развернутой, необходимо и достаточно наличие по крайней мере двух тупых углов среди $[t_i \widehat{,}\ t_j]$ $(i \neq j)$.

Далее, тройку замкнутых *углов* Ω_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ с общей вершиной в некоторой точке w назовем *развернутой*, если каждая тройка лучей $T_i \subset \Omega_i$, исходящих из w, является развернутой. Ясно, что развернутая тройка замкнутых углов Ω_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ с вершиной в точке w обладает следующим свойством: *какова бы ни была прямая, проходящая через точку w, по каждую сторону от нее лежит по крайней мере один из углов Ω_i, который имеет с этой прямой одну-единственную общую точку w.*

Дадим следующее определение.

Определение 8. Функция $f(z)$ *обладает свойством* K_0' в точке $z \in \mathfrak{D}$, если

1) она обладает свойством K', причем тройка лучей $t_i(z)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ является развернутой, и

2) при всех достаточно малых $|\Delta z|$ на этих лучах имеем $f(z + \Delta z) \neq f(z)$, $z + \Delta z \in t_i(z)$.

Определение 9. Функция $f(z)$ *обладает свойством* $\overline{K'}$ (или $\overline{K_0}'$) в точке $z \in \mathfrak{D}$, если сопряженная ей функция $\overline{f(z)}$ обладает свойством K' (соответственно K_0') в этой точке.

Свойство $\overline{K'}$ равносильно следующему: образы лучей $t_i(z)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ — см. определение 7 — в плоскости w при отображении $w = f(z)$ суть непрерывные кривые $L_i(w)$ с касательными T_i в смысле определения 5, такими, что

$$[t_i \widehat{,}\ t_j] = [T_i \widehat{,}\ T_j]$$

при $i \neq j$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$, причем направления отсчета углов меняются на противоположные.

Мы докажем следующую теорему.

Теорема 19. *Пусть $w = f(z)$ — произвольное непрерывное отображение области $\mathfrak{D}$, обладающее свойствами K_0' или $\overline{K_0'}$ в каждой ее точке, исключая не* *более чем счетное их множество. Тогда всюду в области* $\mathfrak{D}$ *либо функция* $f(z)$, *либо ей сопряженная* $\overline{f(z)}$ *является аналитической.*

Заметим сразу, что в этой теореме нельзя заменить свойства K_0, $\overline{K'_0}$ более общими свойствами K', $\overline{K'}$, как показывает уже пример функции Бора $B(z) = x + i\,|y|$ $(z = x + iy)$.

Для доказательства теоремы 19 приведем две леммы.

Лемма 38. *Пусть* $w = f(z)$ — *непрерывная в области* $\mathfrak{D}$ *функция и* $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$ — *произвольное совершенное множество. Предположим, что существует множество* $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{P}$ *не первой категории на* $\mathfrak{P}$, *в каждой точке которого имеет место свойство* K'_0 *или* $\overline{K'_0}$.

Тогда найдутся порция $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$ *и числа* σ, δ, $\delta' > 0$, *такие, что имеют место свойства* (для i, $j = 1, 2, 3$):

1. *Из каждой точки* $z \in \mathfrak{P}'$ *исходят три луча* $\tau_i(z)$, *для которых*

а) $[\tau_i(z')\,\hat{,}\,\tau_i(z'')] < \sigma$ *при любых* z', $z'' \in \mathfrak{P}'$ *и*

б) $800\sigma < [\tau_i(z)\,\hat{,}\,\tau_j(z)] < \pi - 800\sigma$, *если* $i \neq j$ *при любом* $z \in \mathfrak{P}'$.

2. *Если* $\mathfrak{P}'_1$ *есть образ множества* $\mathfrak{P}'$ *при отображении* $w = f(z)$, *то из каждой точки* $w \in \mathfrak{P}'_1$ *как из вершины исходят три замкнутых угла* $\Omega_i(w)$, *полученных параллельным переносом фиксированной тройки углов* Ω_i *с общей вершиной и удовлетворяющих условиям*:

а) *углы* Ω_i *образуют развернутую тройку*;

б) *образ отрезка длины* δ *луча* $\tau_i(z)$ *расположен в замкнутом угле* $\Omega_i(w)$ *и имеет диаметр* $\geqslant \delta'$.

3. *Расстояние множества* $\mathfrak{P}'$ *до границы области* $\mathfrak{D}$ *больше* δ.

Доказательство. Лучи $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3;\ z \in \mathfrak{N})$ отображаются на некоторые кривые с определенными касательными $T_i(w)$ в соответствующей точке $w \in \mathfrak{P}_1$ 1); в силу свойств K'_0, $\overline{K'_0}$ эти касательные образуют, очевидно, развернутую тройку.

---

1) Так как взаимной однозначности соответствия между $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}_1$, вообще говоря, нет, то в одной точке $w \in \mathfrak{P}_1$ может быть определено несколько троек таких касательных.

В плоскостях z и w зафиксируем определенные лучи t и T соответственно и обозначим через

$$\mathfrak{N}(n_1,\ n_2,\ n_3,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ p,\ q,\ q') = \mathfrak{N}(n_i,\ \nu_i,\ p,\ q,\ q')$$

множество точек $z \in \mathfrak{N}$, удовлетворяющих условиям (при $i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3$):

(А) $$\left| \{t\hat{,}t_i(z)\} - \frac{\nu_i}{800p} \right| < \frac{1}{800p},$$

где через $\{t\hat{,}t_i(z)\}$ обозначена величина угла, отсчитываемого в положительном направлении от t, заключенная между 0 и 2π (включая 0);

(Б) $$\frac{8}{p} < [t_i(z)\hat{,}t_j(z)] < \pi - \frac{8}{p}$$

при $i \neq j$;

(В) $$\left| \{T\hat{,}T_i(w)\} - \frac{\nu_i}{800p} \right| < \frac{1}{800p},$$

где $w \in \mathfrak{P}_1$ — соответствующая точка для $z \in \mathfrak{N}$;

(Г) $$[T_i(w)\hat{,}T_j(w)] + [T_j(w)\hat{,}T_k(w)] > \pi + \frac{1}{p}$$

при попарно различных i, j, k;

(Д) угол $\Omega_i(p, w)$ раствора $\frac{1}{800p}$ с вершиной $w \in \mathfrak{P}_1$ и биссектрисой $T_i(w)$ содержит образ отрезка луча $t_i(z)$ длины $\frac{1}{q}$, причем при $|\Delta z| \leqslant \frac{1}{q}$ диаметр этого образа не меньше $\frac{1}{q'}$ и $f(z + \Delta z) \neq f(z)$.

Из определения свойств K'_0 и $\overline{K'_0}$ и из условий леммы следует, что

$$\bigcup \mathfrak{N}(n_i,\ \nu_i,\ p,\ q,\ q') = \mathfrak{N},$$

где суммирование распространено на всевозможные целые положительные значения чисел n_i, ν_i, p, q, q'. Так как $\mathfrak{N}$ — не первой категории на $\mathfrak{P}$, то найдутся определенные значения n_i, ν_i, p, q, q', такие, что соответствующее им множество $\mathfrak{N}(n_i,\ \nu_i,\ p,\ q,\ q')$ будет всюду плотно на некоторой порции $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, причем $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}'$, где $\overline{\mathfrak{D}'} \subset \mathfrak{C}$ — круг.

Очевидно, можно предположить, что расстояние от множества $\mathfrak{P}'$ до границы области $\mathfrak{D}$ больше $\frac{1}{q}$.

Положим

$$\mathfrak{N}(n_i, \nu_i, p, q, q') = \mathfrak{N}', \quad \frac{1}{200p} = \sigma, \quad \frac{1}{q} = \delta, \quad \frac{1}{q'} = \delta'$$

и докажем, что для множества $\mathfrak{P}'$ и чисел σ, δ, δ' имеют место все свойства, указанные в лемме.

Для этого определим в точках $z \in \mathfrak{P}'$ лучи $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ следующим образом: полагаем $\tau_i(z) = t_i(z)$ для точек $z \in \mathfrak{P}' \cap \mathfrak{N}'$, а для точек $z \in \mathfrak{P}' \setminus \mathfrak{N}'$ в качестве $\tau_i(z)$ возьмем одно из предельных положений лучей $t_i(z')$, когда точки $z' \in \mathfrak{N}'$ стремятся к z; такое определение возможно в силу плотности $\mathfrak{N}'$ на $\mathfrak{P}'$.

Из неравенств (А) следует теперь, что

$$[\tau_i(z')\,\widehat{,}\,\tau_i(z'')] \leqslant \frac{1}{400p} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

для всех точек z', $z'' \in \mathfrak{P}'$, а из неравенств (Б) получим

$$\frac{8}{p} \leqslant [\tau_i(z)\,\widehat{,}\,\tau_j(z)] \leqslant \pi - \frac{8}{p}$$

при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ для каждой точки $z \in \mathfrak{P}'$. Из последних неравенств в силу определения числа σ следует, что для лучей $\tau_i(z)$ выполнено свойство 1. Так как расстояние от множества $\mathfrak{P}'$ до границы области $\mathfrak{D}$ больше $\frac{1}{q}$, то имеем также и свойство 3.

Докажем свойство 2.

Возьмем на плоскости w фиксированную тройку лучей T_i $(i = 1, 2, 3)$, совпадающую с некоторой тройкой $T_i(w')$ касательных в точке $w' \in \mathfrak{P}'_1$, соответствующей точке $z' \in \mathfrak{N}' \cap \mathfrak{P}'$; в силу (Г) эта тройка развернута. Построим фиксированную тройку замкнутых углов Ω_i раствора $\frac{1}{200p} = \sigma$ с общей вершиной в точке w' и с соответственными биссектрисами T_i $(i = 1, 2, 3)$; из (В) и (Г) следует, что углы Ω_i образуют развернутую тройку. Из этого построения в силу (В), (Г) и (Д) следует, что тройка углов $\Omega_i(w)$ $(i = 1, 2, 3)$, полученная параллельным переносом углов Ω_i в точку $w \in \mathfrak{P}'_1$, соответственную точке $z \in \mathfrak{N}'$, содержит углы $\Omega_i(p, w)$, а вместе с ними и образы отрезков $t_i(z)$ длины $\frac{1}{q}$, имеющие диаметры не меньше $\frac{1}{q'}$.

Покажем, что это имеет место и для всех остальных точек $\mathfrak{P}'_1$.

Пусть $z \in \mathfrak{P}' \setminus \mathfrak{N}'$ — произвольная точка и $w \in \mathfrak{P}'_1$ — соответствующая ей точка при отображении $w = f(z)$.

Выберем фиксированное $\varepsilon \leqslant \frac{1}{q} = \delta$ и обозначим через z_i $(i = 1, 2, 3)$ точку луча $\tau_i(z)$, для которой

$$|z_i - z| = \varepsilon.$$

Если $z' \in \mathfrak{N}'$, то через z'_i $(i = 1, 2, 3)$ обозначим точку луча $t_i(z')$, для которой

$$|z'_i - z'| = \varepsilon \leqslant \frac{1}{q}.$$

Согласно предыдущему, точки

$$w'_i = f(z'_i) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

лежат в соответствующих углах $\Omega_i(w')$ с вершиной $w' = f(z') \in \mathfrak{P}'_1$. Луч $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ есть одно из предельных положений лучей $t_i(z')$, когда z' стремится к z; из предыдущих равенств следует, что точки z'_i стремятся при этом к z_i, а точки w'_i — к некоторым точкам $w_i = f(z_i)$. Но так как замкнутые углы $\Omega_i(w)$ $(i = 1, 2, 3)$ являются, очевидно, предельными для углов $\Omega_i(w')$, то точки $f(z_i) = w_i$ лежат в $\Omega_i(w)$.

Тем самым мы показали, что углы $\Omega_i(w)$ содержат образы отрезков $\tau_i(z)$ длины $\frac{1}{q}$; докажем, что диаметры этих образов не меньше $\frac{1}{q'} = \delta'$.

В самом деле, для этого достаточно на лучах $t_i(z')$ выбрать точки z'_i так, чтобы

$$|z'_i - z'| = \varepsilon_i(z') \leqslant \frac{1}{q}$$

и

$$|f(z'_i) - f(z')| = \delta',$$

и провести прежнее рассуждение.

Лемма 38 доказана.

Теорему 19 мы выведем из следующей леммы.

Лемма 39. *Если непрерывная в области* $\mathfrak{D}$ *функция* $w=f(z)$ *обладает свойством* K_0' *или* $\overline{K_0'}$ *в каждой ее точке, исключая не более чем счетное их множество, то отображение* $w=f(z)$ *области* $\mathfrak{D}$ *является внутренним* (по Стоилову; см. главу 3).

Покажем сначала, как отсюда следует теорема 19.

Так как внутреннее отображение есть суперпозиция топологического и аналитического отображений области $\mathfrak{D}$, то оно либо во всех точках области сохраняет ориентацию, либо во всех точках меняет ее на противоположную. Если имеет место первое, то ясно, что в условиях теоремы 19 всюду в области $\mathfrak{D}$ имеет место свойство K_0' (исключая не более чем счетное множество точек $\mathfrak{D}$) и, следовательно, по теореме 18 функция $f(z)$ является аналитической всюду в $\mathfrak{D}$; второй случай операцией сопряжения приводится к первому.

Переходим к доказательству леммы 39.

Доказательство леммы 39.

1. Покажем сначала, что в условиях леммы отображение $w=f(z)$ не переводит ни один континуум в точку; более того, докажем, что прообраз любой точки w не более чем счетен в области $\mathfrak{D}$.

Предположим противное; тогда в силу непрерывности отображения $w=f(z)$ полный прообраз некоторой точки w_0 является замкнутым и несчетным множеством. Обозначим совершенное ядро этого множества через $\mathfrak{p}$.

По лемме 38 находим порцию $\mathfrak{p}'\subset\mathfrak{p}$, обладающую всеми свойствами, указанными в этой лемме. На каждом луче $\tau_i(z)$ $(i=1, 2, 3)$, $z\in\mathfrak{p}'$, выберем отрезок (с концом z) наименьшей длины $\lambda_i(z)\leqslant\delta$, такой, что диаметр его образа еще равен $\delta'>0$. Так как расстояние множества $\mathfrak{p}'$ до границы области $\mathfrak{D}$ больше δ, то в силу равномерной непрерывности отображения $w=f(z)$ все числа $\lambda_i(z)$ $(i=1, 2, 3$; $z\in\mathfrak{p}')$ имеют положительную нижнюю грань λ, $\lambda\leqslant\delta$.

По предположению все точки $\mathfrak{p}'$ отображаются в одну точку w_0; поэтому найденное число $\lambda>0$ обладает тем свойством, что если в точке w_0 взять замкнутые секторы $S_i(w_0)$ углов $\Omega_i(w_0)$ $(i=1, 2, 3)$ радиуса δ', то образы отрезков всех $\tau_i(z)$ $(z \in \mathfrak{p}')$ длины λ расположены в соответствующих секторах $S_i(w_0)$.

Из доказательства леммы 38 следует, что на $\mathfrak{p}'$ существует плотное множество точек, в которых имеет место свойство K_0' или $\overline{K_0'}$ с теми же лучами $\tau_i(z)$ $(i=1, 2, 3)$. Возьмем одну из таких точек $z_0 \in \mathfrak{p}'$, а также произвольную точку $z_1 \in \mathfrak{p}'$, лежащую внутри круга

$$|z-z_0| < \frac{1}{2}\lambda \sin 700\sigma.$$

Так как для отрезков Δz лучей $\tau_i(z_0)$ $(i=1, 2, 3)$ при $|\Delta z| \leqslant \delta$ всегда

$$f(z_0+\Delta z) \neq f(z_0)$$

и по предположению $f(z_0)=f(z_1)=w_0$, то точка z_1 лежит внутри угла, образованного лучами $\tau_i(z_0)$. Допустим для определенности, что точка z_1 лежит внутри угла, образованного лучами $\tau_1(z_0)$ и $\tau_2(z_0)$.

Как и в лемме 13 (ср. также лемму 35), найдем, что луч $\tau_2(z_1)$ пересекает одну из сторон этого угла в некоторой точке $\tilde{z}$, такой, что

$$|z_0-\tilde{z}| < \lambda \leqslant \delta,$$
$$|z_1-\tilde{z}| < \lambda \leqslant \delta,$$

и, следовательно, $f(z_1)=f(z_0) \neq f(\tilde{z})$. Но это противоречиво, так как образы отрезков $\tau_1(z_0)$, $\tau_2(z_0)$ и $\tau_3(z_1)$ длины λ расположены в непересекающихся секторах $S_i(w_0)$ $(i=1, 2, 3)$.

Из доказанной счетности прообраза следует, что для каждой точки z_0 области $\mathfrak{D}$ можно провести окружность с центром z_0 сколь угодно малого радиуса, не проходящую через прообраз точки $w_0=f(z_0)$.

2. Предположим, вопреки утверждению леммы, что отображение $w=f(z)$ не является внутренним, и обозначим через $\mathfrak{P}$ множество всех точек области $\mathfrak{D}$, в каждой окрестности которых это отображение не является внутренним. Ясно, что $\mathfrak{P}$ — совершенное множество[1]; следовательно, в каждой компоненте открытого множества $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ отображение $w=f(z)$ является внутренним.

---

[1] Хотя бы в силу леммы Стоилова.

По лемме 38 находим порцию $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}'$ (где $\mathfrak{D}'$ — круг), для которой имеют место все свойства, указанные в этой лемме.

Так как в силу определения множества $\mathfrak{P}$ внутри $\mathfrak{D}'$ отображение $w = f(z)$ не является внутренним, то найдутся точка $z_0 \in \mathfrak{P}'$ и замкнутый круг $\overline{\mathfrak{b}} \subset \mathfrak{D}'$ с центром z_0, такие, что $w_0 = f(z_0)$ есть граничная точка континуума $\overline{\mathfrak{b}}_1 = f(\overline{\mathfrak{b}})$. В силу сказанного в п. 1, уменьшая, если нужно, радиус круга $\mathfrak{b}$, можно добиться того, чтобы образ его граничной окружности не проходил через точку w_0: $w_0 \in \mathfrak{P}'_1$, где $\mathfrak{P}'_1$ — образ множества $\mathfrak{P}'$ при отображении $w = f(z)$.

Проводя теперь те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 8 (см. п. 1), убедимся, что точку $w_0 \in \overline{\mathfrak{b}}_1$ можно считать сильно достижимой граничной точкой континуума $\overline{\mathfrak{b}}_1$ с определяющим ее кругом $\mathfrak{Q}$.

Возьмем касательную T_0 к этому кругу в точке w_0. Так как тройка замкнутых углов $\mathfrak{L}_i(w_0)$ $(i = 1, 2, 3)$, указанных в лемме 38, является развернутой, то по крайней мере один из них — пусть $\mathfrak{L}_1(w_0)$ — расположен по одну сторону касательной T_0 вместе с кругом $\mathfrak{Q}$, имея с T_0 лишь одну общую точку w_0. Отсюда следует, что некоторый сектор замкнутого угла $\mathfrak{L}_1(w_0)$ расположен внутри $\mathfrak{Q}$. Но это противоречит тому, что по построению круг $\mathfrak{Q}$ не содержит ни одного образа точки круга $\overline{\mathfrak{b}}$, в то время как угол $\mathfrak{L}_1(w_0)$, наверное, содержит внутри $\mathfrak{Q}$ образы точек луча $\tau_1(z_0)$, так как образ отрезка $\tau_1(z_0)$ длины δ лежит в этом угле и имеет диаметр, не меньший δ'.

Тем самым лемма 39, а вместе и теорема 19, доказана полностью.

Интересно, что можно сказать об отображениях $w = f(z)$, обладающих более общими свойствами K', $\overline{K}'$; в частности, имеет ли для них место утверждение теоремы 11?

Отметим частный случай теоремы 19.

Теорема 20. *Пусть* $w = f(z)$ — *непрерывное отображение области* $\mathfrak{D}$, *для каждой точки* z *которой — за исключением не более чем счетного множества — найдется окрестность* U_z *такая, что*

$$f(z + \Delta z) \neq f(z)$$

при $z + \Delta z \in U_z$.

Если в каждой точке $\mathfrak{D}$, *исключая не более чем счетное их множество, отображение* $w = f(z)$ *является конформным или первого или второго рода, то либо функция* $f(z)$, *либо ей сопряженная* $\overline{f(z)}$ *является аналитической всюду внутри* $\mathfrak{D}$.

Эта теорема показывает, что если, например, непрерывное отображение области в каждой ее точке сохраняет углы по величине, то — с точностью до операции сопряжения — оно во всех точках области сохраняет и направление их отсчета.

Заметим, наконец, что теорема 18, являясь обобщением теоремы 16, все же не обобщает теорему 17, так как мы в ней, по существу, пользовались соотношением

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \operatorname{Arg} \mathrm{T}_z$$

при $z+\Delta z \in t_i(z)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

§ 6. Отображения со свойством K'''

Мы докажем здесь следующую теорему:

Теорема 21. *Если произвольное непрерывное отображение* $w = f(z)$ *области* $\mathfrak{D}$ *обладает свойством* K''' *в каждой ее точке, исключая не более чем счетное их множество, то функция* $f(z)$ *является аналитической всюду в* $\mathfrak{D}$.

Доказательство. I. Покажем сначала, что в условиях теоремы существует открытое всюду плотное в $\mathfrak{D}$ множество $\mathfrak{O}$ точек аналитичности $f(z)$.

Возьмем произвольную замкнутую область $\overline{\mathfrak{b}} \subset \mathfrak{D}$. По лемме 15 находим круг $\mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b}$ такой, что каждая точка $z \in \mathfrak{b}'$ является вершиной пары вертикальных углов $V(z)$, для любой точки $z' \in \mathfrak{b}' \cap V(z)$ которых имеем

$$|f(z') - f(z)| < L_1 |z' - z| \tag{12}$$

(L_1 — постоянная).

Так как в углах $V(z)$ можно провести сколько угодно лучей, выходящих из их вершин z, то, применяя лемму 13, можно считать, что (12) имеет место для любых точек $z, z' \in \mathfrak{d}'$. Но тогда $f(z)$ оказывается почти всюду в $\mathfrak{d}'$ дифференцируемой функцией. В силу лемм 7 и 11 отсюда следует аналитичность $f(z)$ всюду внутри $\mathfrak{d}' \subset \mathfrak{d}$.

Из произвольности $\overline{\mathfrak{d}} \subset \mathfrak{D}$ и вытекает наше утверждение.

Предполагая теперь, что теорема неверна, находим непустое совершенное множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$ всех точек, в которых $f(z)$ не является аналитической; в силу только что доказанного множество $\mathfrak{P}$ нигде не плотно в $\mathfrak{D}$.

По лемме 34 находим порцию $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}$ $(\overline{\mathfrak{D}}' \subset \mathfrak{D}$ — круг), для которой имеют место указанные в ней свойства. Диаметр круга $\mathfrak{D}'$ будем предполагать меньшим $\frac{1}{2}\delta \sin 700\sigma$. Лучи $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, исходящие из точки $z \in \mathfrak{P}'$, назовем лучами этой точки, а лучи $\tau_i(z_1)$ и $\tau_j(z_2)$, точек $z_1, z_2 \in \mathfrak{P}'$ при $i \neq j$ — разноименными лучами.

В силу леммы 34 имеем

$$\left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| < \frac{1}{\sigma}$$

при $z' \in \tau_i(z)$ $(i = 1, 2)$ и $|z' - z| \leqslant \delta$.

Если какие-либо из разноименных лучей точек $z_1, z_2 \in \mathfrak{P}'$ пересекаются, то они пересекаются в точке $\tilde{z}$ на не превосходящем δ расстоянии от обеих точек z_1 и z_2 (см. доказательство леммы 13), и, как и в лемме 13, получим

$$|f(z_2) - f(z_1)| < \frac{2}{\sigma^2} |z_2 - z_1|.$$

Отсюда следует, что для тех же точек

$$|w_r(z_2) - w_r(z_1)| < L |z_2 - z_1|,$$

где $w_r(z) = f(z) + rz$ и $L = \frac{2}{\sigma^2} + r$.

Взяв теперь в лемме 34 число $a = 2L$, для функции $w(z) = e^{-i\Phi_0} w_r(z) + 2Lz$ из предыдущих неравенств имеем

$$L |z_2 - z_1| < |w(z_2) - w(z_1)| < 3L |z_2 - z_1|. \qquad (13)$$

Так как $L > \frac{1}{\sigma}$ $\left(\text{напомним, что } \sigma < \frac{\pi}{1600}\right)$, то, очевидно, неравенства (13) имеют место и для произвольной точки $z_2 \in \tau_i(z_1)$ $(i=1,\ 2)$.

Используя утверждение леммы 34 и замечания к ней, приходим к следующему выводу:

Если теорема неверна, то найдутся порция $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{D}'$ $(\mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$ — круг) нигде не плотного совершенного множества $\mathfrak{P}$ и числа σ, $L > 0$, такие, что из каждой точки $z \in \mathfrak{P}'$ исходят два луча $\tau_i(z)$ $(i=1,\ 2)$, обладающих следующими свойствами:

1) $[\tau_i(z')\widehat{,}\tau_i(z'')] < \sigma$ $(i=1,\ 2)$ для любых точек z', $z'' \in \mathfrak{P}'$.

2) $800\sigma < [\tau_1(z)\widehat{,}\tau_2(z)] < \pi - 800\sigma$ для всех точек $z \in \mathfrak{P}'$.

3) Если z_1, $z_2 \in \mathfrak{P}'$ и некоторые разноименные лучи этих точек пересекаются на плоскости [1], то для непрерывной в $\overline{\mathfrak{D}}'$ функции вида

$$w(z) = e^{-i\Phi_0}[f(z) + rz] + 2Lz$$

$(r,\ \Phi_0$ — постоянные) имеют место неравенства

$$L\,|z_1 - z_2| < |w(z_2) - w(z_1)| < 3L\,|z_2 - z_1|.$$

В частности, это имеет место, если одна из точек z_1, z_2 принадлежит вертикальным углам $V(z)$ с вершиной в другой точке (см. доказательство леммы 15).

Эти же неравенства справедливы и для произвольной точки $z_2 \in \tau_i(z_1)$ $(i=1,\ 2)$.

4) Если $\mathfrak{P}'_1$ — образ множества $\mathfrak{P}'$ при отображении $w = w(z)$, то из каждой точки $w \in \mathfrak{P}'_1$ как из вершины исходят два луча $\Omega_i(w)$ $(i=1,\ 2)$ раствора 4σ каждый, полученных параллельным переносом фиксированной пары углов Ω_1, Ω_2 с общей вершиной и обладающих тем свойством, что образ $L_i(w)$ отрезка $\tau_i(z)$, расположенного в круге $\mathfrak{D}'$ (диаметр которого меньше δ), при отображении $w = w(z)$ расположен внутри угла $\Omega_i(w)$; при этом

$$800\sigma < [\Omega_1\widehat{,}\Omega_2] < \pi - 800\sigma,$$

где $[\Omega_1\widehat{,}\Omega_2]$ есть угол между биссектрисами углов Ω_1, Ω_2.

---

[1] Напомним, что эта точка пересечения принадлежит области $\mathfrak{D}$, так как диаметр круга $\mathfrak{D}'$ меньше $\frac{1}{2}\delta\sin 700\sigma$ (см. выше).

5) Направление кратчайшего поворота от $\tau_1(z)$ до $\tau_2(z)$, $z\in\mathfrak{P}'$, совпадает с направлением кратчайшего поворота от $\Omega_1(w)$ до $\Omega_2(w)$.

Подчеркнем еще раз, что $\mathfrak{P}'$ нигде не плотно в круге $\mathfrak{D}'$, в каждой точке множества $\mathfrak{D}'\setminus\mathfrak{P}'$ функция $f(z)$, а потому и $w(z)$, является аналитической и в каждой точке множества $\mathfrak{P}'$ неаналитична.

Мы покажем, что функция $w=w(z)$ с указанными свойствами осуществляет внутреннее отображение круга $\mathfrak{D}'$; в силу основной теоремы Стоилова и теоремы 5 отсюда будет следовать, что $w(z)$ является аналитической всюду в $\mathfrak{D}'$. Но это будет означать аналитичность и данной функции $f(z)$ в $\mathfrak{D}'\supset\mathfrak{P}'$, что и явится искомым противоречием.

Возьмем произвольную точку $z\in\mathfrak{P}'$; ее лучи $\tau_1(z)$, $\tau_2(z)$ образуют угол $0<\tau_1\widehat{,}\tau_2(z)<\pi$, направление биссектрисы которого мы примем за направление оси Ox, причем ось Oy выберем так, чтобы этот угол был расположен справа [1]) от прямой, проходящей через z параллельно оси Oy; эту прямую можно считать общей биссектрисой вертикальных углов $V(z)$ раствора 30σ, определенных в лемме 15. Из свойств 1) и 2) лучей $\tau_i(z)$, $z\in\mathfrak{P}'$, следует тогда, что если параллельно перенести оси координат в любую точку $z'\in\mathfrak{P}'$, то один из ее лучей $\tau_i(z')$ будет лежать в нижней полуплоскости (именно, в IV квадранте), а другой — в верхней (в I квадранте). Из тех же свойств 1) и 2) следует, что все нижние (соответственно все верхние) лучи имеют одинаковый индекс $i=1,2$; будем обозначать нижние лучи через τ_1, а верхние — через τ_2.

Точно так же на плоскости w в качестве направления оси абсцисс u возьмем направление биссектрисы угла $800\sigma<\Omega_1\widehat{\ }\Omega_2<\pi-800\sigma$, а ось ординат v выберем так, чтобы этот угол (вместе с Ω_i, $i=1,2$) располагался справа от прямой, проходящей через вершину его параллельно оси v [2]). Тогда один из углов $\Omega_i(w)$ любой точки $w\in\mathfrak{P}'_1$

---

[1]) Считая ось Oy направленной вертикально вверх, а ось Ox — вправо.

[2]) Выбор направления осей u, v равносилен умножению функции $w(z)$ на постоянный множитель $e^{i\varphi}$, что сохраняет все перечисленные выше свойства этой функции.

будет нижним, а другой — верхним. В силу свойства 5) образ нижнего луча $\tau_1(z)$, $z \in \mathfrak{P}'$, должен лежать обязательно в нижнем угле, и, следовательно, этот угол есть $\Omega_1(w)$, где $w \in \mathfrak{P}'_1$ — точка, соответствующая точке z; аналогично, образ верхнего луча $\tau_2(z)$ лежит в верхнем угле $\Omega_2(w)$.

II. Докажем, что при отображении $w = w(z)$ ни один континуум в круге $\mathfrak{D}'$ не сводится в точку. Предполагая противное, найдем континуум $\mathfrak{k}$, на котором

$$w(z) = w_0 = \text{const}, \quad z \in \mathfrak{k}. \tag{14}$$

Можно считать, что континуум $\mathfrak{k}$ принадлежит множеству $\mathfrak{P}'$. В самом деле, если $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{D}' \setminus \mathfrak{P}'$, то из (14) в силу теоремы единственности для аналитических функций было бы $w(z) \equiv \text{const}$ в некоторой компоненте $\mathfrak{G}$ множества $\mathfrak{D}' \setminus \mathfrak{P}'$. Но $\mathfrak{G}$ не может совпадать с $\mathfrak{D}' \setminus \mathfrak{P}'$, так как в противном случае $w(z) \equiv \text{const}$ во всем круге $\mathfrak{D}'$, что противоречило бы свойству 3) функции $w(z)$. Поэтому, в частности, граница области $\mathfrak{G}$ относительно круга $\mathfrak{D}'$ должна содержать континуум, на котором также $w(z) = w_0$, но этот континуум, очевидно, принадлежит $\mathfrak{P}'$.

Если $z \in \mathfrak{k}$ — произвольная точка, то вертикальные углы $V(z)$ не могут содержать точек континуума $\mathfrak{k}$, так как если бы $z' \in V(z)$ была такой точкой, то из свойства 3) следовало бы

$$|w(z') - w(z)| > L\,|z' - z| > 0,$$

что противоречит равенству (14).

Поэтому для каждой точки z континуума $\mathfrak{k}$ вертикальные углы $V(z)$ не содержат точек $\mathfrak{k}$, откуда следует, что $\mathfrak{k}$ есть график однозначной функции $y = y(x)$, удовлетворяющей условию Липшица. Теперь, используя то же свойство 3), легко показать, что если $z \in \mathfrak{k}$ произвольно, то вся часть этого графика, расположенная правее точки z, лежит внутри угла $\tau_1\hat{\tau}_2(z)$.

Покажем сначала, что на дуге $\mathfrak{k}$ имеется всюду плотное множество $\mathfrak{E}$ точек z таких, что в обоих углах $V(z)$ в произвольной близости от z найдутся точки множества $\mathfrak{P}'$; мы убедимся даже, что $\mathfrak{E}$ — всюду второй категории на $\mathfrak{k}$.

В противном случае найдется множество $\mathfrak{E}' \subset \mathfrak{k}$ не первой категории на $\mathfrak{k}$, для каждой точки z которого один из секторов по крайней мере одного из углов $V(z)$ не содержит точек $\mathfrak{P}'$. Через $\mathfrak{E}'_n$ и $\mathfrak{E}''_n$ обозначим множество точек $z \in \mathfrak{k}$, для которых сектор верхнего, соответственно нижнего, угла $V(z)$ радиуса $\frac{1}{n}$ не содержит точек $\mathfrak{P}'$; легко показать, что $\mathfrak{E}'_n$, $\mathfrak{E}''_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — замкнутые множества на $\mathfrak{k}$. Так как

$$\mathfrak{E}' = \left(\bigcup_n \mathfrak{E}'_n\right) \cup \left(\bigcup_n \mathfrak{E}''_n\right),$$

то, как и обычно, найдем дугу $\mathfrak{k}' \subset \mathfrak{k}$, которая содержится в одном из множеств $\mathfrak{E}'_n$, $\mathfrak{E}''_n$; пусть $\mathfrak{k}' \subset \mathfrak{E}'_n$.

Выберем произвольную внутреннюю точку $z' \in \mathfrak{k}'$ и такой прямоугольник $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{D}'$ с центром z' и сторонами, параллельными осям координат, внутри которого содержатся лишь точки дуги $\mathfrak{k}'$ и не содержатся другие точки $\mathfrak{k}$; часть дуги $\mathfrak{k}'$ внутри $\mathfrak{R}$ обозначим $\tilde{\mathfrak{k}}'$, а часть прямоугольника $\mathfrak{R}$, расположенную выше $\tilde{\mathfrak{k}}'$, обозначим $\mathfrak{R}'$. Выберем диаметр прямоугольника $\mathfrak{R}$ меньшим $\frac{1}{n}$; тогда в силу определения множества $\mathfrak{E}'_n \subset \tilde{\mathfrak{k}}'$ внутри $\mathfrak{R}$ над дугой $\tilde{\mathfrak{k}}'$ нет точек $\mathfrak{P}'$, т. е. в жордановой области $\mathfrak{R}'$ функция $w(z)$ всюду аналитична. Так как на граничной дуге $\tilde{\mathfrak{k}}'$ имеем

$$w(z) = w_0 = \text{const},$$

то в силу известной теоремы единственности аналитических функций получим, что всюду в области $\overline{\mathfrak{R}'}$ $w(z) = w_0 = \text{const}$.

Рассмотрим лучи $\tau_1(z')$, $\tau_2(z')$ произвольной внутренней точки z' дуги $\tilde{\mathfrak{k}}'$; так как вся часть $\tilde{\mathfrak{k}}'$, расположенная правее z', лежит внутри угла $\tau_1 \widehat{,} \tau_2(z')$, то луч $\tau_2(z')$ лежит выше кривой $\mathfrak{k}' \subset \tilde{\mathfrak{k}}'$. Некоторый начальный отрезок этого луча лежит, следовательно, в области $\mathfrak{R}'$, но это противоречит свойству 3), в силу которого

$$|w(z'') - w(z')| > L\,|z'' - z'| > 0$$

при любом $z'' \in \tau_i(z')$, $i = 1, 2$.

Итак, на $\mathfrak{k}$ существует множество $\mathfrak{E}$ всюду второй категории, для каждой точки z которого оба вертикальных угла $V(z)$ содержат точки $\mathfrak{P}'$ в произвольной близости от z.

Пусть $z_0 \in \mathfrak{C}$ — некоторая внутренняя точка дуги $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{R}'$ — прямоугольник, диагоналями которого служат стороны углов $V(z_0)$. Выберем $\mathfrak{h}$ так, чтобы внутри него лежала дуга $\mathfrak{k}' \subset \mathfrak{k}$ с концами на обоих его вертикальных сторонах. Возьмем некоторые точки z', $z'' \in \mathfrak{P}' \cap \mathfrak{h}$, лежащие соответственно в верхнем и нижнем углах $V(z_0)$ (рис. 4).

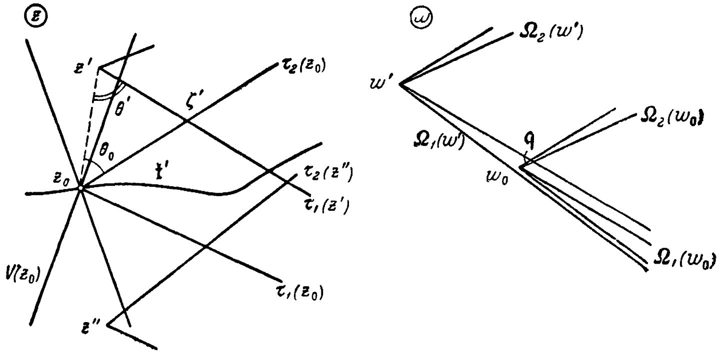

Рис. 4.

Так как углы $V(z')$, $V(z'')$ получаются параллельным переносом углов $V(z_0)$, то легко видеть, что z', $z_0 \in V(z'')$ (так же, как и z'', $z_0 \in V(z')$); поэтому разноименные лучи $\tau_1(z')$ и $\tau_2(z'')$ точек z', z'' пересекаются в точке $\tilde{z}$.

Рассмотрим треугольник $z'z''\tilde{z}$ с соответственными углами θ', θ'' и $\tilde{\theta}$; из соотношений

$$\frac{|z'-\tilde{z}|}{\sin\theta''} = \frac{|z''-\tilde{z}|}{\sin\theta'} = \frac{|z'-z''|}{\sin\tilde{\theta}},$$

$$\sin\tilde{\theta} > \sin 700\sigma$$

(см. свойство 2) лучей τ_i) следует, что наибольшая сторона треугольника $z'z''\tilde{z}$ оказывается меньше $\frac{1}{\sin 700\sigma}|z'-z''|$; так как смежные углы для $V(z_0)$ — тупые, то

$$|z_0 - z'|, \quad |z_0 - z''| < |z' - z''|.$$

Отсюда следует, что

$$|z_0 - \tilde{z}| < \left(1 + \frac{1}{\sin 700\sigma}\right) |z' - z''|.$$

Но $z_0 \in \mathfrak{E} \subset \mathfrak{k}$, поэтому точки $z', z'' \in \mathfrak{P}'$ можно выбрать с произвольно малым $|z' - z''|$; выберем их так, чтобы точка $\tilde{z}$ пересечения их разноименных лучей $\tau_1(z')$ и $\tau_2(z'')$ лежала внутри прямоугольника $\mathfrak{d}$. Эти лучи вместе с лучами $\tau_1(z_0)$, $\tau_2(z_0)$ при пересечении образуют некоторый четырехугольник $\overline{z_0\zeta'\tilde{z}\zeta''}$, внутри которого находятся точки дуги $\mathfrak{k}'$; из построения следует, что один из лучей $\tau_1(z')$, $\tau_2(z'')$ — пусть $\tau_1(z')$ — обязательно пересекает $\mathfrak{k}'$ в некоторой точке z'_0.

Так как каждая из точек z_0, z', z'' лежит в вертикальных углах V с вершинами в двух других, то в силу свойства 3) точки $w_0 = w(z_0)$ $w' = w(z')$ и $w'' = w(z'')$ попарно различны на плоскости w. По условию луч $\tau_1(z')$ пересекает $\mathfrak{k}'$ в точке z'_0; но $w(z'_0) = w_0 (z'_0 \in \mathfrak{k}')$, поэтому точка w_0 должна лежать внутри угла $\mathfrak{Q}_1(w')$ и, очевидно, вместе с углом $\mathfrak{Q}_1(w_0)$ (рис. 4). В силу выбора величины углов $\mathfrak{Q}_i$ и соотношений

$$800\sigma < [\mathfrak{Q}_1 \hat{,} \mathfrak{Q}_2] < \pi - 800\sigma$$

второй угол $\mathfrak{Q}_2(w_0)$ не может содержать точку w' и в пересечении с $\mathfrak{Q}_1(w')$ образует треугольник $\mathfrak{q}$, диаметр которого, как нетрудно подсчитать, не превышает

$$|w' - w_0| \frac{\sin 4\sigma}{\sin 700\sigma} < \frac{1}{100} |w' - w_0|;$$

здесь использованы известные неравенства

$$\sin \alpha < \alpha \qquad (\alpha > 0),$$

$$\sin \alpha > \frac{2}{\pi} \alpha \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right). \qquad (*)$$

Ясно теперь, что образ ω' точки ζ' пересечения лучей $\tau_1(z')$ и $\tau_2(z_0)$ должен лежать внутри треугольника $\mathfrak{q}$; поэтому должно выполняться соотношение

$$\left| \frac{\omega' - w_0}{w' - w_0} \right| < \frac{1}{100}. \qquad (15)$$

С другой стороны, рассмотрим треугольник $z'z_0\zeta'$ с углами θ_0', θ_0 при вершинах z', z_0. Если через β обозначить один из острых углов $[\tau_i(z)\widehat{,}Oy]$, $z\in\mathfrak{P}'$, то в силу свойства 1) лучей $\tau_i(z)$ другие углы $[\tau_i(z)\widehat{,}Oy]$ отличаются от β меньше чем на σ. Далее, величина углов $V(z_0)$ равна 30σ; так как прямая $\overline{z_0z'}$ принадлежит $V(z_0)$, то отсюда и из свойства 2) получим

$$\beta-20\sigma<\theta_0,\ \theta_0'<\beta+20\sigma \tag{16}$$

и

$$350\sigma<\beta<\frac{\pi}{2}-350\sigma. \tag{17}$$

Из неравенств свойства 3) имеем

$$L\,|\zeta'-z_0|<|w(\zeta')-w(z_0)|<3L\,|\zeta'-z_0|,$$
$$L\,|z'-z_0|<|w(z')-w(z_0)|<3L\,|z'-z_0|;$$

так как $w(z_0)=w_0$, $w(z')=w'$, $w(\zeta')=\omega'$, то отсюда

$$\left|\frac{\omega'-w_0}{w'-w_0}\right|>\frac{1}{3}\left|\frac{\zeta'-z_0}{z'-z_0}\right|. \tag{18}$$

Из треугольника $z'z_0\zeta'$ и неравенств (*), (16), (17) следует

$$\left|\frac{\zeta'-z_0}{z'-z_0}\right|=\frac{\sin\theta_0'}{\sin(\theta_0+\theta_0')}=\frac{1}{\dfrac{\sin\theta_0}{\sin\theta_0'}\cos\theta_0'+\cos\theta_0}>\frac{1}{\dfrac{\sin\theta_0}{\sin\theta_0'}+1}.$$

Но

$$\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_0'}<\frac{\sin(\beta+20\sigma)}{\sin(\beta-20\sigma)}<\frac{\pi}{2}\,\frac{\beta+20\sigma}{\beta-20\sigma}=\frac{\pi}{2}\,\frac{1+\dfrac{20\sigma}{\beta}}{1-\dfrac{20\sigma}{\beta}};$$

так как

$$\frac{20\sigma}{\beta}<\frac{20\sigma}{350\sigma}=\frac{2}{35}$$

и функция $\frac{1+x}{1-x}$ возрастает при $x<1$, то

$$\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_0'}<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{37}{33}<2.$$

Возвращаясь последовательно к неравенству (18), окончательно получим

$$\left|\frac{\omega' - w_0}{w' - w_0}\right| > \frac{1}{9},$$

что противоречит неравенству (15).

Тем самым показано, что полный прообраз любой точки w_0 при отображении $w = w(z)$ есть замкнутое (в $\mathfrak{D}'$) всюду разрывное множество. Из замечания, сделанного в начале настоящего пункта, отсюда следует, что в каждой компоненте множества $\mathfrak{D}' \setminus \mathfrak{P}'$ должно быть $w(z) \not\equiv \text{const}$.

III. Для доказательства того, что отображение $w = w(z)$ является внутренним в $\mathfrak{D}'$, очевидно, достаточно показать, что оно является внутренним в любом ромбе $\mathfrak{R}$, $\overline{\mathfrak{R}} \subset \mathfrak{D}'$, содержащем точки $\mathfrak{P}'$, стороны которого параллельны сторонам вертикальных углов $V(z)$ какой-либо точки $z \in \mathfrak{P}'$. По теореме 8 нам достаточно доказать, что образ части множества $\mathfrak{P}'$ в $\overline{\mathfrak{R}}$ нигде не плотен на плоскости w. Выясним некоторые свойства отображения $w = w(z)$ на $\overline{\mathfrak{R}}$.

Покажем, что образ λ_1 границы $\lambda = \overline{\mathfrak{R}} \setminus \mathfrak{R}$ ромба есть замкнутое нигде не плотное множество на плоскости. В самом деле, замкнутость λ_1 следует из непрерывности функции $w(z)$ в $\mathfrak{D}'$. Далее, λ состоит из некоторого не более чем счетного множества открытых дуг $\{\lambda^{(n)}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, принадлежащих множеству $\mathfrak{D}' \setminus \mathfrak{P}'$, и некоторого подмножества $\mathfrak{p}'$ точек из $\mathfrak{P}'$. Но на каждой дуге $\lambda^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ функция $w(z)$ аналитична, а потому образ ее в плоскости w нигде не плотен; в силу свойства 3) функции $w(z)$ (см. п. II) часть множества $\mathfrak{p}'$, лежащая на одной из сторон $\mathfrak{R}$, отображается взаимно однозначно в плоскость w, а потому образ этой части также нигде не плотен.

Итак, образ λ_1 контура λ при отображении $w = w(z)$ есть объединение не более чем счетного числа множеств, нигде не плотных на плоскости w, т. е. является множеством первой категории на плоскости; но так как λ_1 еще и замкнуто, то оно само нигде не плотно на плоскости.

Доказательство того, что образ множества $\mathfrak{P}' \cap \overline{\mathfrak{R}}$ нигде не плотен, мы разобьем на ряд лемм.

Обозначим через $\varkappa$ множество следов на плоскости w всех точек ветвления системы римановых поверхностей $\{\mathfrak{B}\}$, на которые функция $w(z)$ отображает компоненты множества $\mathfrak{D}' \setminus \mathfrak{P}'$.

Лемма 40. *Пусть $\mathfrak{G}$ — открытый выпуклый многоугольник плоскости w, такой, что $\overline{\mathfrak{G}} \cap \lambda_1 = 0$, причем граница области $\mathfrak{G}$ есть сумма ломаных l_1, l_2, не пересекающих $\varkappa$, таких, что если в произвольную точку w ломаной l_k ($k = 1$, 2), параллельно перенести оба угла Ω_1, Ω_2, то угол $\Omega_k(w)$ лежит вне замкнутой области $\overline{\mathfrak{G}}$.*

Тогда:

1) *полный прообраз $\mathfrak{G}$ области $\mathfrak{Q}$ при отображении $w = w(z)$ ромба $\mathfrak{R}$ расположен строго внутри $\mathfrak{R}$: $\overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{R}$;*

2) *граница $\overline{\mathfrak{D}} \setminus \mathfrak{D}$ множества $\mathfrak{D}$ отображается в границу $\mathfrak{G}$, причем граничной точке $\mathfrak{G}$ могут соответствовать лишь граничные точки множества $\mathfrak{D}$;*

3) *компоненты открытого множества $\mathfrak{D}$ суть жордановы области.*

Доказательство. Как и на стр. 86—87, легко докажем, что $\overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{R}$, а также что $\overline{\mathfrak{D}} \setminus \mathfrak{D}$ отображается в границу $\mathfrak{G}$; ясно, что $w(\overline{\mathfrak{D}}) \subset \overline{\mathfrak{G}}$. Покажем теперь, что граничной точке $\mathfrak{G}$ могут соответствовать лишь граничные точки $\overline{\mathfrak{D}}$.

Предположим противное; тогда найдется внутренняя точка z множества $\mathfrak{D}$, переходящая при отображении $w = w(z)$ в некоторую точку w контура $\overline{\mathfrak{G}} \setminus \mathfrak{G}$. В силу включения $w(\overline{\mathfrak{D}}) \subset \overline{\mathfrak{G}}$ точка z не может быть точкой аналитичности $w(z)$, а потому $z \in \mathfrak{P}'$; но z — внутренняя точка $\overline{\mathfrak{G}}$, поэтому некоторые начальные отрезки лучей $\tau_1(z)$, $\tau_2(z)$ лежат целиком в $\mathfrak{D}$ и, следовательно, их образы, расположенные внутри соответствующих углов $\Omega_1(w)$, $\Omega_2(w)$, должны принадлежать $\overline{\mathfrak{G}}$. Но это противоречит условию, что один из этих углов расположен полностью вне $\overline{\mathfrak{G}}$ (исключая точку w). Тем самым доказано и утверждение 2).

Докажем утверждение 3).

Прежде всего, из утверждения 2) следует, что множество $\mathfrak{D}$ не имеет «внутренних» граничных точек, т. е. граничных точек, являющихся внутренними точками замыкания $\overline{\mathfrak{D}}$; следовательно, в любой окрестности каждой граничной точки $\mathfrak{D}$ имеются точки, внешние относительно $\mathfrak{D}$.

Покажем теперь, что замкнутое множество $\overline{\mathfrak{D}}$ не разбивает плоскости z. Допуская противное и учитывая, что в силу $\overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{R}$ существует лишь одна компонента дополнения $C\overline{\mathfrak{D}}$, содержащая и бесконечно удаленную точку и контур $\lambda = \overline{\mathfrak{R}} \setminus \mathfrak{R}$, найдем ограниченную компоненту $\mathfrak{g}' \subset C\overline{\mathfrak{D}}$, лежащую строго внутри $\mathfrak{R}$. Легко видеть, что все граничные точки $\mathfrak{g}'$ являются граничными и для множества $\mathfrak{D}$, т. е. принадлежат множеству $\overline{\mathfrak{D}} \setminus \mathfrak{D}$; поэтому образ границы $\mathfrak{g}'$ (при отображении $w = w(z)$) принадлежит границе многоугольника $\mathfrak{G}$. Но $\mathfrak{g}'$ — ограниченная область, поэтому граница ее содержит невырожденный континуум и, следовательно[1], образ границы $\mathfrak{g}'$ содержит невырожденный отрезок l одного из граничных звеньев многоугольника $\mathfrak{G}$.

Из определения области $\mathfrak{g}' \subset C\overline{\mathfrak{D}}$ следует, что ее образ $\mathfrak{g}_1'$ полностью расположен вне многоугольника $\mathfrak{G}$, а потому граничные точки континуума $\overline{\mathfrak{G}}_1'$, отличные от точек $\overline{\mathfrak{G}} \setminus \mathfrak{G}$, должны соответствовать внутренним точкам $\mathfrak{g}'$, т. е. некоторым точкам множества $\mathfrak{P}' \cap \mathfrak{g}'$.

Выберем внутри $\mathfrak{g}'$ последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in \mathfrak{g}' \setminus \mathfrak{P}'$ $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящихся к такой граничной точке области $\mathfrak{g}'$, чтобы их образы $\{w_n\}$ стремились (извне $\mathfrak{G}$) к точке $w' \in l$, отличной от вершины многоугольника $\mathfrak{G}$. Возьмем круг $|w - w'| < \rho$ столь малого радиуса ρ, чтобы вершины $\mathfrak{G}$ лежали вне его, и одну из точек w_n, попавших внутрь этого круга, обозначим w^*. Так как соответствующая точка $z^* \in \mathfrak{g}' \setminus \mathfrak{P}'$ есть точка аналитичности функции $w(z)$, то найдется окрестность ее $U(z^*) \subset \mathfrak{g}'$, образ которой есть некоторый круг $\mathfrak{q}(w^*) \subset \mathfrak{g}_1'$ с центром w^*, также расположенный внутри круга $|w - w'| < \rho$.

Рассмотрим теперь два возможных случая:

а) луч, выходящий из каждой внутренней точки отрезка l, параллельный и одинаково направленный с положительной полуосью Ox, пересекает область $\mathfrak{G}$;

(б) каждый указанный в (а) луч не пересекает $\mathfrak{G}$.

Беря сначала случай (а), предположим для определенности, что $l \subset l_2$; это значит, что при переносе углов $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ во внутреннюю точку $w \in l$ угол $\mathfrak{Q}_1(w)$ входит в область $\mathfrak{G}$,

---

[1] В силу доказанного в п. II.

а угол $\Omega_2(w)$ лежит вне ее. Примем временно l за ось абсцисс, направленную горизонтально так, чтобы выше l лежали внешние точки $\mathfrak{G}$. Из проделанного построения и выпуклости $\mathfrak{G}$ следует, что луч T, выходящий из w^* и направленный вправо от нее параллельно l, расположен полностью вне $\overline{\mathfrak{G}}$. В силу ограниченности континуума $\overline{\mathfrak{g}'_1}$ на T найдется точка ω такая, что круг $\mathfrak{q}(\omega)$ с центром ω, конгруэнтный кругу $\mathfrak{q}(w^*)$, лежит вне этого континуума. Будем теперь перемещать $\mathfrak{q}(\omega)$ вдоль луча T по направлению к его начальной точке w^*; так как w^* есть внутренняя точка континуума $\overline{\mathfrak{g}'_1}$, а ω — внешняя, то на луче T найдется такая первая точка ω', что круг $\mathfrak{q}(\omega')$, конгруэнтный кругу $\mathfrak{q}(\omega)$, имеет на левой своей полуокружности граничную точку $w'' \in \overline{\mathfrak{g}'_1}$ (рис. 5). Но точке w'' может соответствовать лишь внутренняя точка $z'' \in \mathfrak{g}'$, принадлежащая, очевидно, множеству $\mathfrak{P}'$. Поэтому некоторые начальные отрезки обоих лучей $\tau_1(z'')$, $\tau_2(z'')$ должны лежать полностью внутри $\mathfrak{g}' \subset \overline{\mathfrak{g}'}$, в то время как их образы (принадлежащие $\overline{\mathfrak{g}'_1}$) должны лежать в углах $\Omega_1(w'')$, $\Omega_2(w'')$; но из построения w'' легко видеть, что по

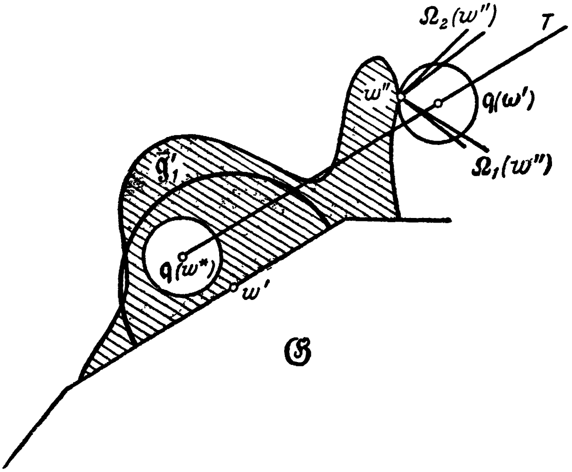

Рис. 5.

крайней мере для одного из этих углов некоторый сектор его с вершиной w'' лежит полностью внутри круга $\mathfrak{q}(\omega')$, который совсем не содержит точек континуума $\bar{\mathfrak{g}}'_1$.

Если же имеем случай (б), то проведенные рассуждения полностью сохраняются, если в качестве луча T взять полупрямую, параллельную оси x и направленную вправо.

Полученное противоречие и показывает, что множество $\bar{\mathfrak{D}}$ (в частности, замыкание каждой компоненты $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{D}$) не разбивает плоскости.

Отсюда и из уже доказанного утверждения 2) легко следует, что каждая компонента $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{D}$ односвязна. В самом деле, если бы это было не так, то нашлась бы простая замкнутая кривая $\gamma\subset\mathfrak{g}$, внутри которой находились бы граничные, а потому (в силу 2)) и внешние точки $\mathfrak{g}$; но это и означало бы, что $\bar{\mathfrak{g}}$ разбивает плоскость.

Тем самым и показано, что $\mathfrak{D}$ состоит из односвязных компонент.

Покажем, наконец, что каждая компонента $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{D}$ является жордановой областью. Так как $\bar{\mathfrak{g}}$ — континуум, не разбивающий плоскость, то дополнение $\mathfrak{h} = C\bar{\mathfrak{g}}$ (до расширенной плоскости) есть односвязная область, множество граничных точек которой совпадает с таковым для области $\mathfrak{g}$: это следует из того, что $\mathfrak{g}$ не имеет «внутренних» граничных точек (см. выше). Поэтому достаточно показать, что граница $\mathfrak{h}$ есть замкнутая жорданова кривая; здесь мы, как и на стр. 91, воспользуемся теорией простых концов.

Покажем сначала, что каждая граничная точка $\mathfrak{h}$ является достижимой. В самом деле, если $z'\in\bar{\mathfrak{h}}\setminus\mathfrak{h}$ и $z'\notin\mathfrak{P}'$, то в некоторой окрестности $U(z')$ функция $w(z)$ аналитична и однолистна, так как $w' = w(z')\in\bar{\mathfrak{G}}\setminus\mathfrak{G}$, а потому $w'\notin\varkappa$; но отсюда следует, что часть границы $\mathfrak{h}$ внутри $U(z')$ топологически соответствует части контура $\bar{\mathfrak{G}}\setminus\mathfrak{G}$ вблизи w'. Ясно, что $U(z')$ можно выбрать так, чтобы эта часть контура $\bar{\mathfrak{G}}\setminus\mathfrak{G}$ была простой дугой (ломаной). В силу указанного гомеоморфизма этой ломаной внутри $U(z')$ соответствует простая граничная дуга области $\mathfrak{h}$. Очевидно, что z' — достижимая точка для $\mathfrak{h}$.

Если же $z' \in \overline{\mathfrak{h}} \setminus \mathfrak{h}$ и $z' \in \mathfrak{P}'$, то $w' = w(z') \in \overline{\mathfrak{G}} \setminus \mathfrak{G}$ и $w' \in \mathfrak{P}'_1$; но так как $w' \in l_k$ ($k = 1$ или 2), то угол $\mathfrak{L}_k(w')$ лежит вне многоугольника $\mathfrak{G}$, следовательно, отрезок луча $\tau_k(z')$ длины δ[1] не может пересекать замкнутой области $\overline{\mathfrak{g}}$ (кроме точки z'), т. е. луч $\tau_k(z') \subset \overline{\mathfrak{h}}$ и точка z' достижима даже прямолинейным отрезком на $\mathfrak{h}$.

Но доказанное означает, что граница области $\mathfrak{h}$, а следовательно и $\mathfrak{g}$, есть непрерывная кривая, а так как каждая граничная точка $\mathfrak{h}$ есть граничная и для $\mathfrak{g}$ (и наоборот), то каждая точка этой кривой достижима и из $\mathfrak{h}$, и из $\mathfrak{g}$; это же равносильно тому, что совместная граница этих областей есть замкнутая простая кривая.

Лемма 40 доказана полностью.

Лемма 41. *Пусть дан континуум $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{P}'$ такой, что лучи $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2)$, $z \in \mathfrak{k}$, не имеют с ним общих точек, кроме z. Тогда $\mathfrak{k}$ содержит свободную*[2] *дугу $\mathfrak{k}'$ одного из следующих типов*:

1. *$\mathfrak{k}'$ — график однозначной функции $y = \psi(x)$, удовлетворяющей условию Липшица, причем для точек z некоторого плотного на $\mathfrak{k}'$ множества все точки $\mathfrak{k}'$, расположенные вправо*[3] *от z, лежат внутри угла $\widehat{\tau_1, \tau_2}(z)$*;

2. *$\mathfrak{k}'$ — график однозначной функции $x = \varphi(y)$, удовлетворяющей условию Липшица, причем для точек z некоторого плотного на $\mathfrak{k}'$ множества угол $\widehat{\tau_1, \tau_2}(z)$ расположен вправо*[3] *от этого графика.*

Доказательство. Прежде всего ясно, что существует такой фиксированный угол V' на плоскости с биссектрисой, направленной вдоль положительной полуоси Ox, что при параллельном переносе его в любую точку $z \in \mathfrak{k}$ полученный угол $V'(z)$ всегда лежит внутри угла $\widehat{\tau_1, \tau_2}(z)$.

Покажем теперь, что в каждой точке континуума $\mathfrak{k}$ контингенция его не содержит некоторого угла. В самом деле, легко видеть, что в наших условиях на $\mathfrak{k}$ имеются лишь точки двоякого рода: если $z \in \mathfrak{k}$, то

---

[1] См. лемму 34.

[2] Простая дуга $\overset{\frown}{ab} \subset \mathfrak{k}$ (без концов) называется свободной, если $\overset{\frown}{ab}$ открыто на $\mathfrak{k}$.

[3] Напомним, что ось Oy направлена вертикально вверх.

1) либо угол $\tau_1\widehat{,}\tau_2(z)$ полностью содержит некоторый подконтинуум $\mathfrak{k}$,

2) либо угол $\tau_1\widehat{,}\tau_2(z)$ совсем не содержит точек $\mathfrak{k}$.

Ясно, что в случае (2) контингенция $\mathfrak{k}$ в точке z не содержит угла $\tau_1\widehat{,}\tau_2(z)$ и, тем более, угла $V'(z)$.

В случае же 1) по крайней мере один из вертикальных углов $V(z)$ не входит в контингенцию $\mathfrak{k}$. Действительно, если бы в любой близости от z в обоих вертикальных углах $V(z)$ можно было найти точки z', z'', то, как и в п. II, мы построили бы четырехугольник $\overline{z\zeta'\tilde{z}\zeta''}$ столь малых размеров, чтобы один из лучей $\tau_1(z')$, $\tau_2(z'')$ пересекал подконтинуум континуума $\mathfrak{k}$[1]), расположенный внутри угла $\tau_1\widehat{,}\tau_2(z)$; но это по условию невозможно.

Мы имеем

$$\mathfrak{k}=\left(\bigcup_n \mathfrak{e}'_n\right)\cup\left(\bigcup_n \mathfrak{e}''_n\right)\cup\left(\bigcup_n \mathfrak{e}'''_n\right), \tag{19}$$

где $\mathfrak{e}'_n$, $\mathfrak{e}''_n$ — множества точек $z\in\mathfrak{k}$, для которых угол $\tau_1\widehat{,}\tau_2(z)$ содержит некоторый подконтинуум $\mathfrak{k}$, и сектор верхнего, соответственно нижнего, угла $V(z)$ радиуса $\frac{1}{n}$ не содержит точек $\mathfrak{k}$; $\mathfrak{e}'''_n$ — множество точек $z\in\mathfrak{k}$, для которых сектор угла $\tau_1\widehat{,}\tau_2(z)$ радиуса $\frac{1}{n}$ не содержит точек $\mathfrak{k}$.

Имеем также

$$\mathfrak{k}=\left(\bigcup_n \mathfrak{E}'_n\right)\cup\left(\bigcup_n \mathfrak{E}''_n\right)\cup\left(\bigcup_n \mathfrak{E}'''_n\right),$$

где $\mathfrak{E}'_n$, $\mathfrak{E}''_n$ — множества точек $z\in\mathfrak{k}$, для которых сектор верхнего, соответственно нижнего, угла $V(z)$ радиуса $\frac{1}{n}$ не содержит точек $\mathfrak{k}$; $\mathfrak{E}'''_n$ — множество точек $z\in\mathfrak{k}$, для которых сектор угла $V'(z)$ радиуса $\frac{1}{n}$ не содержит точек $\mathfrak{k}$.

Легко показать, что каждое из множеств $\mathfrak{E}^{(j)}_n$ ($j=1, 2, 3$; $n=1, 2, \ldots$) замкнуто и что

$$\mathfrak{e}^{(j)}_n\subset\mathfrak{E}^{(j)}_n. \tag{20}$$

---

[1]) Отметим, что в этом месте существенно используется связность $\mathfrak{k}$.

Так как континуум $\mathfrak{k}$ — второй категории в себе, то из (19) следует, что на некоторой порции $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}' \cap \mathfrak{d}_1$ ($\mathfrak{d}_1 \subset \mathfrak{D}'$ — круг) одно из множеств $\mathfrak{e}_n^{(j)}$ всюду плотно, но в силу (20) на $\mathfrak{k}_1$ плотным будет и $\mathfrak{G}_n^{(j)}$, а так как $\mathfrak{G}_n^{(j)}$ замкнуто, то $\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{G}_n^{(j)}$. По условию $\mathfrak{k}$ — континуум, поэтому и $\mathfrak{k}_1$ содержит некоторый невырожденный подконтинуум $\mathfrak{k}'$; будем еще считать, что радиус круга $\mathfrak{d}_1$ взят меньшим $\frac{1}{n}$

Для определенности положим, что $j = 1$, т. е.

$$\mathfrak{k}' \subset \mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{G}_n'; \tag{21}$$

случаи $j = 2$, 3 разбираются аналогично.

Из определения $\mathfrak{G}_n'$ и включения (21) следует, что $\mathfrak{k}'$ пересекается каждой прямой, параллельной оси Oy, не более чем в одной точке z, причем оба вертикальных угла $V(z)$ внутри $\mathfrak{d}_1$ не содержат точек $\mathfrak{k}'$, т. е. $\mathfrak{k}'$ есть график однозначной функции $y = \psi(x)$, удовлетворяющей условию Липшица. Из самого построения следует, что некоторая часть множества $\mathfrak{e}_n'$ всюду плотна на $\mathfrak{k}'$; тем самым доказано утверждение 1 леммы. Аналогично доказывается и утверждение 2.

Лемма 41 доказана.

Вернемся к условиям леммы 40 и рассмотрим частные случаи многоугольников $\mathfrak{G}$, которые мы и используем в дальнейшем.

Величину наименьшего угла, образованного сторонами углов Ω_1, Ω_2 и содержащего биссектрису угла $[\Omega_1 \hat{,} \Omega_2]$, $0 < [\Omega_1 \hat{,} \Omega_2] < \pi$, обозначим через α. Тогда в качестве многоугольника $\mathfrak{G}$ мы будем применять либо равнобедренный треугольник Δ с основанием, параллельным оси u, и с углом при основании, меньшим $\frac{1}{2}\alpha$, либо левую его половину Δ', отделенную его высотой; ясно, что эти треугольники удовлетворяют условиям, предъявляемым к многоугольнику $\mathfrak{g}$ в лемме 40 (рис. 6).

Лемма 42. *Пусть треугольник* Δ (*или* Δ') *удовлетворяет всем условиям леммы* 40 *и пусть* $\mathfrak{O}$ (*соответственно* $\mathfrak{O}'$) — *полный прообраз его внутри* $\mathfrak{R}$. *Если* $\mathfrak{O}$ (*или* $\mathfrak{O}'$) *имеет бесконечное множество компонент, то диаметры их стремятся к нулю.*

Доказательство. Рассматривая сначала случай треугольника Δ и предполагая противное, найдем бесконечную последовательность (попарно не пересекающихся) жордановых областей $\mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{D}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ таких, что их диаметры $d(\mathfrak{g}_n) \geqslant \delta$; в силу теоремы о сходимости множеств [49] можно считать, что последовательность $\{\mathfrak{g}_n\}$ сходится к некоторому невырожденному континууму $\mathfrak{f}$.

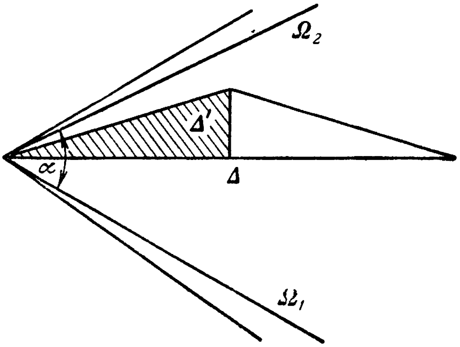

Рис. 6.

Легко показать, что $\mathfrak{f}$ нигде не плотно на плоскости. В самом деле, пусть $\mathfrak{K}_0$ — произвольный круг; тогда либо $\mathfrak{K}_0$ не пересекается с $\{\mathfrak{g}_n\}$, либо имеет с какой-либо $\mathfrak{g}_n$ общую внутреннюю точку ζ. Так как $\mathfrak{g}_n$ попарно не пересекаются, то некоторый круг с центром ζ внутри $\mathfrak{K}_0$ не может принадлежать пределу областей $\{\mathfrak{g}_n\}$. Из произвольности $\mathfrak{K}_0$ отсюда и следует, что $\mathfrak{f} = \lim \mathfrak{g}_n$ нигде не плотно на плоскости.

Очевидно, что $\mathfrak{f}$ принадлежит границе $\overline{\mathfrak{D}} \setminus \mathfrak{D}$ открытого множества $\mathfrak{D}$ и, следовательно (по лемме 40), образ его при отображении $w = w(z)$ лежит на контуре Δ. При этом образ граничных точек $\mathfrak{g}_n$ вблизи любой точки $\mathfrak{f}$ также лежит на контуре Δ; отсюда легко вытекает, что ни одна точка $\mathfrak{f}$ не является точкой аналитичности $w(z)$, т. е. $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{P}'$. Рассматривая, если нужно, подконтинуум $\mathfrak{f}$, можно предположить, что образ самого $\mathfrak{f}$ принадлежит либо только основанию Δ, либо только паре боковых его сторон. Очевидно, что как в первом, так и во втором случае углы $\mathfrak{Q}_i(w)$ $(i = 1, 2)$, исходящие из точек w этого образа, уже не пересекают последнего; следовательно, каждый луч $\tau_i(z)$ $(i=1, 2)$, исходящий из точек $z \in \mathfrak{f}$, не должен пересекать $\mathfrak{f}$.

Переходя снова к подконтинуумам, мы, в силу леммы 41, можем считать, что $\mathfrak{f}$ есть простая дуга либо типа 1, либо типа 2. Но случай 2 не может иметь места; действительно, взяв две различные точки указанного в лемме 41 плотного на $\mathfrak{f}$ множества, мы получили бы в этом случае, что некоторые разноименные лучи их должны пересечься, в то время как разноименные углы точек образа (по построению) не могут пересекаться.

Итак, континуум $\mathfrak{f}$ есть график однозначной функции $y=\psi(x)$ со свойствами, указанными в п. 1 леммы 41.

Выберем на $\mathfrak{f}$ три точки z', z'', z''', принадлежащие плотному на $\mathfrak{f}$ множеству (упоминаемому в лемме 41) и взятые последовательно слева направо: вся дуга $z'z'''$ графика $\mathfrak{f}$ лежит внутри угла $\tau_1\widehat{,}\tau_2(z')$, а дуга $z''z'''$ — внутри угла $\tau_1\widehat{,}\tau_2(z'')$. В силу соотношения $\mathfrak{f} \subset \lim \mathfrak{g}_n$ для любого $\varepsilon > 0$ точки всех областей $\mathfrak{g}_n$, начиная с некоторой, попадут внутрь полосы, ограниченной кривыми

$$y=\psi(x) \pm \varepsilon; \tag{22}$$

то же относится и к граничным точкам указанных областей $\mathfrak{g}_n$. Легко видеть, что при достаточно малом ε оба луча $\tau_1(z'')$, $\tau_2(z'')$ пересекают кривые (22) в произвольной близости от z''. Но так как $\mathfrak{g}_n$ связна и по построению одна ее часть лежит вне угла $\tau_1\widehat{,}\tau_2(z'')$, а другая — внутри, то отсюда следует, что в произвольной близости от z'' один из лучей $\tau_i(z'')$ $(i=1, 2)$, пусть $\tau_2(z'')$, пересекает все $\mathfrak{g}_n$ и их границы, начиная с некоторого n. Но тогда внутри угла $\mathfrak{Q}_2(w'')$ в произвольной близости от его вершины w'' должны находиться точки контура Δ[1]), так как только им соответствуют граничные точки $\mathfrak{g}_n$; это же, в силу построения Δ, невозможно.

Тем самым лемма для треугольника Δ доказана.

Предполагая теперь, что для треугольника Δ' лемма неверна, мы найдем последовательность жордановых областей $\mathfrak{g}'_n \subset \mathfrak{D}'$, сходящихся к невырожденному нигде не плотному

---

[1]) Отличные от w''; см. свойство 3) функции $w(z)$.

континууму $\mathfrak{k}'$:

$$\mathfrak{k}' = \lim \mathfrak{g}_n'.$$

Как и выше, будем считать, что образ $\mathfrak{k}'$ (при отображении $w = w(z)$) принадлежит лишь одной из трех сторон Δ'; тогда также можно считать, что $\mathfrak{k}'$ есть дуга либо типа 1, либо типа 2 леммы 41.

Если $\mathfrak{k}'$ — дуга типа 1, то проходят все предыдущие рассуждения, приводящие это допущение к противоречию. Поэтому $\mathfrak{k}'$ должно быть графиком однозначной функции $x = \varphi(y)$ со свойствами, указанными в лемме 41; но тогда из рассуждений, проведенных для случая Δ, отсюда следует, что образ $\mathfrak{k}$ должен принадлежать вертикальному катету Δ' (высоте Δ).

В некоторой «правой» окрестности кривой $\mathfrak{k}'$, т. е. в полосе, ограниченной кривыми $x = \varphi(y)$, $x = \varphi(y) + \varepsilon$ (при некотором $\varepsilon > 0$), не могут находиться точки областей $\mathfrak{g}_n$, так как иначе они пересекались бы лучами $\tau_i(z)$ ($i = 1, 2$) некоторых точек $z \in \mathfrak{k}'$ в произвольной близости от них (подробнее ср. выше для Δ). Поэтому области $\mathfrak{g}_n$ сходятся к $\mathfrak{k}'$ «слева», т. е. для любого $\varepsilon > 0$ точки всех $\mathfrak{g}_n$, начиная с некоторой, попадают внутрь полосы, ограниченной кривыми $x = \varphi(y)$, $x = \varphi(y) - \varepsilon$.

При доказательстве леммы 40 было показано, что из ее утверждения 2) следует, что вблизи каждой граничной точки множества $\mathfrak{D}'$, находятся внешние к нему точки. Поэтому в любой «левой» окрестности кривой $\mathfrak{k}'$ вблизи каждой ее точки найдутся точки дополнения $C\overline{\mathfrak{D}}'$. Покажем, что среди этих последних найдутся точки множества $\mathfrak{P}'$.

Предполагая противное, находим «левую» окрестность $\mathfrak{H}(z_0)$ некоторой точки $z_0 \in \mathfrak{k}'$, ограниченную кривыми $x = \varphi(y)$, $x = \varphi(y) - \varepsilon$, а также соответственно подобранными прямыми $y = y_1$, $y = y_2$ ($y_2 > y_1$), такую, что $C\overline{\mathfrak{D}}'$ не содержит в ней точек $\mathfrak{P}'$ и, следовательно, состоит лишь из точек аналитичности функции $w(z)$. Так как никакой континуум не сводится в точку при отображении $w = w(z)$, то можно считать, что точки z_1, $z_2 \in \mathfrak{k}'$, лежащие на прямых $y = y_1$, $y = y_2$, переходят в различные точки w_1, w_2 вертикального катета Δ'; будем предполагать также, что z_1 и z_2 — внутренние точки $\mathfrak{k}'$.

В силу соотношения $\mathfrak{k}' \subset \lim \mathfrak{g}'_n$ отсюда получим, что область $\mathfrak{g}'_n$ (начиная с некоторого n), имея точки внутри $\mathfrak{H}(z_0)$, имеет их также ниже прямой $y = y_1$ и выше прямой $y = y_2$.

Проведем прямую $y = y_0$, проходящую через точку z_0; перемещаясь от точки z_0 влево до первой точки пересечения с границей $\mathfrak{g}'_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), будем двигаться от этой точки до первых точек пересечения с прямыми $y = y_1$, $y = y_2$. При этом мы получим простую (граничную для $\mathfrak{g}'_n$) дугу l'_n, которая вместе с указанными прямыми и кривой $\mathfrak{k}'$ ограничивает какую-то «левую» окрестность $\tilde{\mathfrak{H}}(z_0)$ точки z_0: $\tilde{\mathfrak{H}}(z_0) \subset \mathfrak{H}(z_0)$. Так как дугу l'_n можно построить для каждой области $\mathfrak{g}'_n$, начиная с некоторой, то из проделанного построения следует бесконечность совокупности компонент множества $C\bar{\mathfrak{D}}' \cap \mathfrak{H}(z_0)$.

Возьмем полосу $\mathfrak{S}_{\delta_0}$: $y_0 - \delta_0 \leqslant y \leqslant y_0 + \delta_0$, со столь малым $\delta_0 > 0$, чтобы она лежала целиком внутри полосы с ограничивающими прямыми $y = y_1$, $y = y_2$. Так как $\mathfrak{S}_{\delta_0}$ содержит граничные точки бесконечного множества областей $\mathfrak{g}'_n$, то существует также бесконечное множество компонент $\mathfrak{h}'_m$ ($m = 1, 2, \ldots$) множества $C\bar{\mathfrak{D}}' \cap \mathfrak{H}(z_0)$, содержащих некоторые точки из $\mathfrak{S}_{\delta_0}$ (здесь еще раз используется то, что в окрестности граничной точки $\mathfrak{D}'$ содержатся внешние его точки; см. выше). Ни одна из компонент $\mathfrak{h}'_m$ не лежит строго внутри $\mathfrak{H}(z_0)$, так как это означало бы, что множество $\bar{\mathfrak{D}}'$ разбивает плоскость, чего не может быть (см. доказательство леммы 40); это означает, что каждая из областей $\mathfrak{h}'_m$ «доходит» по крайней мере до одной из прямых $y = y_1$, y_2, т. е. имеет хотя бы одну точку этих прямых в качестве граничной. В силу выбора $\mathfrak{S}_{\delta_0}$ отсюда следует, что диаметры $d(\mathfrak{h}'_m)$ имеют положительную нижнюю грань:

$$d(\mathfrak{h}'_m) \geqslant \alpha > 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что последовательность $\{\mathfrak{h}'_m\}$ можно считать сходящейся к некоторой невырожденной дуге $\tilde{\mathfrak{k}}' \subset \mathfrak{k}'$ и что все $\mathfrak{h}'_m$ одновременно «доходят» или нет до прямой $y = y_1$ или прямой $y = y_2$.

Пусть для простоты $\mathfrak{h}'_m$ доходят только до прямой $y = y_1$; тогда образы

$$\eta'_m = w\left(h'_m\right), .$$

лежащие вне Δ' (так как $\mathfrak{h}'_m \subset C\bar{\mathfrak{D}}'$), стремятся к отрезку $\tilde{\gamma}' = w(\tilde{\mathfrak{f}}')$ вертикального катета Δ', содержащему точку w_1. Диаметры этих образов $d\left(\eta'_m\right)$ также ограничены снизу:

$$d\left(\eta'_m\right) \geqslant \alpha' > 0.$$

Наконец, выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы граничный для $\mathfrak{H}(z_0)$ отрезок прямой $y = y_1$ (длины ε) при отображении $w = w(z)$ переходил в $\frac{\alpha'}{2}$-окрестность точки w_1, а образ окрестности $\mathfrak{H}(z_0)$ не содержал всего контура Δ'.

По предположению $C\bar{\mathfrak{D}}'$ не имеет точек из $\mathfrak{P}'$ в $\mathfrak{H}(z_0)$, поэтому во всех областях $\mathfrak{h}'_m$ функция $w(z)$ аналитична; следовательно, граничные точки образа $\mathfrak{h}'_m$ могут соответствовать лишь граничным точкам самой области $\mathfrak{h}'_m$. Но граница области $\mathfrak{h}'_m$ принадлежит либо границе $\mathfrak{D}'$, т. е. множеству $\bar{\mathfrak{D}}' \setminus \mathfrak{D}'$, либо отрезку прямой $y = y_1$. Образ первого есть некоторая собственная часть контура Δ' диаметра не меньше α', а второго — некоторая непрерывная кривая, расположенная в $\frac{\alpha'}{2}$-окрестности точки w_1. Очевидно, полученное множество не может содержать границу образа $w\left(\mathfrak{h}'_m\right)$[1], что и является искомым противоречием.

Случай, когда области $\mathfrak{h}'_m$ доходят сразу до обеих прямых $y = y_1$, y_2, исчерпывается аналогично.

Итак, в любой «левой» окрестности каждой точки $\mathfrak{f}'$ находятся точки $\mathfrak{P}'$, лежащие в дополнении $C\bar{\mathfrak{D}}'$.

Возьмем теперь на $\mathfrak{f}'$ такую точку z, чтобы ей соответствовала на вертикальном катете Δ' внутренняя точка и чтобы в точке z кривая $\mathfrak{f}'$ имела определенную касательную θ; очевидно, что этим требованиям легко удовлетворить.

---

[1] Лежащего, напомним, вне Δ'.

По предыдущему слева от $\mathfrak{k}'$ найдется последовательность точек

$$z_n \in \mathfrak{P}' \cap C\overline{\mathfrak{D}}',$$

сходящихся к z. Так как лучи $\tau_i(z_n)$ ($i = 1, 2$; $n = 1, 2, 3, \ldots$) удовлетворяют равномерно условию

$$800\sigma < \tau_1 \widehat{,} \tau_2 (z_n) < \pi - 800\sigma,$$

то очевидно, что по крайней мере один из каждой пары этих лучей пересекает прямую θ и близкие ей по направлению. Но отсюда легко следует, что, начиная с некоторого n, по крайней мере один луч $\tau_1(z_n)$ или $\tau_2(z_n)$ пересекает саму кривую $\mathfrak{k}'$; это же невозможно, так как точки $z_n \in C\overline{\mathfrak{D}}'$ отображаются во вне Δ', их образы стремятся к внутренней точке вертикального катета Δ' и, следовательно, начиная с некоторого n, оба угла $\Omega_1(w_n)$, $\Omega_2(w_n)$ полностью (вместе с вершиной $w_n = w(z_n)$) лежат вне Δ' и не могут содержать, в частности, точек образа кривой $\mathfrak{k}'$.

Тем самым лемма 42 доказана полностью.

Лемма 43. *Пусть контур треугольника* Δ' *не пересекает множества* $\varkappa$ *и пусть* $\mathfrak{D}'$ *— его полный прообраз в ромбе* $\mathfrak{R}$, *а* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{D}'$ *— произвольная компонента. Тогда произвольной внутренней точке вертикального катета* Δ' *соответствует на границе* $\mathfrak{g}$ *лишь конечное число точек.*

Доказательство. По лемме 40 область $\mathfrak{g}$ ограничена простой замкнутой кривой $\gamma = \overline{\mathfrak{g}} \setminus \mathfrak{g}$. Рассмотрим две возможности:

1) на γ нет точек из $\mathfrak{P}'$, переходящих при отображении $w = w(z)$ в точки вертикального катета Δ';

2) такие точки на γ имеются.

В первом случае из того, что контур Δ' не пересекает $\varkappa$, легко следует, что полный прообраз (открытого) вертикального катета Δ' на γ либо пуст, либо состоит из некоторой совокупности простых открытых дуг $\{\gamma_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$), содержащих лишь точки аналитичности функции $w(z)$, в некоторой окрестности каждой из которых она однолистна. Образами концов этих дуг могут быть лишь концы вертикального катета Δ'; это показывается аналогично тому, как делалось на стр. 87.

Легко видеть, что в рассматриваемом случае 1) образ каждой дуги γ_n есть весь катет Δ', причем это отображение гомеоморфно; чтобы убедиться в этом, можно воспользоваться следующим почти очевидным предложением: пусть функция $w(z)$ аналитична в окрестности каждой точки простой кривой Γ — замкнутой или нет, а также включая концы или нет — и $w'(z) \neq 0$ в любой точке $z \in \Gamma$; если образ кривой Γ при отображении $w = w(z)$ есть также простая кривая Γ_1 (или, что то же, принадлежит простой кривой), то соответствие между Γ и Γ_1 при этом отображении взаимно однозначно.

Теперь в силу равномерной непрерывности отображения $w = w(z)$ легко показать, что число дуг γ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ конечно; тем самым для случая 1) утверждение леммы доказано.

Переходя к случаю 2), так же как и выше, найдем на γ полный прообраз $\{\gamma_n\}$ вертикального катета Δ', состоящий из простых открытых дуг γ_n, которые уже могут содержать точки $\mathfrak{P}'$; при этом образами концов γ_n опять-таки могут быть лишь концы катета, но эти образы для одной и той же γ_n могут совпадать.

Пусть точка $z \in \gamma_n \cap \mathfrak{P}'$ и w — ее образ внутри вертикального катета Δ'; тогда оба угла $\Omega_1(w)$, $\Omega_2(w)$ лежат вне треугольника Δ'. Следовательно, если некоторая точка $z \in \gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ принадлежит $\mathfrak{P}'$, то оба луча $\tau_1(z)$, $\tau_2(z)$ не пересекают ни области $\mathfrak{g}$, ни ее границы γ. При этом одно из двух: либо область $\mathfrak{g}$ лежит внутри угла $\tau_1\hat{,}\tau_2(z)$, либо вне него. В первом случае ясно, что z будет самой левой точкой области $\bar{\mathfrak{g}}$ и, следовательно, такая точка может быть только одна. Итак, за исключением, быть может, одной точки, для всех точек z пересечений $\gamma_n \cap \mathfrak{P}'$ $(n = 1, 2, \ldots)$ область $\mathfrak{g}$ лежит вне угла $\tau_1\hat{,}\tau_2(z)$.

Рассмотрим произвольную дугу γ_n $(n = 1, 2, \ldots)$; если она не содержит точек $\mathfrak{P}'$, то, как и выше, она топологически отображается на катет. Пусть пересечение $\gamma_n \cap \mathfrak{P}'$ не пусто и пусть пока для каждой точки $z \in \gamma_n \cap \mathfrak{P}'$ область $\mathfrak{g}$ лежит вне угла $\tau_1\hat{,}\tau_2(z)$. Ясно, что для произвольных различных точек z_1, $z_2 \in \gamma_n \cap \mathfrak{P}'$ некоторые из их разноименных лучей пересекаются вне области $\mathfrak{g}$; из свойства 3) функции $w(z)$ следует тогда, что им соответствуют на катете также различные точки w_1, w_2, т. е. соответствие между

$\gamma_n \cap \mathfrak{P}'$ и его образом взаимно однозначно. Более того, это соответствие оказывается подобием, т. е. сохраняющим порядок. В самом деле, пусть, например, пересекаются лучи $\tau_1(z_2)$ и $\tau_2(z_1)$, т. е. точка z_2 лежит выше точки z_1 (относительно оси Oy); тогда должны пересекаться и углы $\Omega_1(w_2)$ и $\Omega_2(w_1)$, что возможно лишь в том случае, если w_2 расположена выше w_1.

Далее, как и выше, убеждаемся, что открытые дуги из $\gamma_n \setminus \mathfrak{P}'$ отображаются в вертикальный катет Δ' взаимно однозначно. Теперь можно показать, что на наименьшей открытой дуге $\tilde{\gamma}_n \subset \gamma_n$[1]), содержащей все точки $\gamma_n \cap \mathfrak{P}'$ (предполагая наличие более чем одной такой точки), это отображение также взаимно однозначно. В самом деле, топологически отображая дугу γ_n на интервал (0, 1) оси Ox, а вертикальный катет Δ' — на интервал (0, 1) оси Oy и учитывая, что взаимно однозначное непрерывное соответствие между интервалами и подобное соответствие между произвольными линейными множествами осуществляются строго монотонными функциями, убеждаемся, что наше утверждение вытекает из следующей легко доказываемой леммы.

Лемма 44. *Пусть на интервале* (0, 1) *заданы ограниченная непрерывная функция* $y = \varphi(x)$ *и замкнутое множество* $\mathfrak{p} \subset (0, 1)$, *содержащее по крайней мере две точки такие, что на* $\mathfrak{p}$ *функция* $\varphi(x)$ *строго возрастает, а на каждом интервале смежности к* $\mathfrak{p}$ — *строго монотонна. Тогда* $\varphi(x)$ *строго возрастает на наименьшем интервале, содержащем* $\mathfrak{p}$.

Из леммы 44 следует также, что одной точке оси Oy может соответствовать не более трех точек оси Ox. Возвращаясь к прежним условиям, получим, что одной точке вертикального катета Δ' может соответствовать не более трех точек дуги γ_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Покажем теперь, что число различных дуг системы $\{\gamma_n\}$, образы которых содержат фиксированную точку (открытого) катета Δ', конечно. В противном случае таких дуг $\{\gamma_{n_k}\}$ было бы бесконечно много и, следовательно, их диаметры $d(\gamma_{n_k}) \to 0$, так как γ_{n_k} лежат на жордановой кривой γ.

---

[1]) Легко видеть, что в наших условиях γ_n не совпадает с γ, поэтому $\tilde{\gamma}_n$ определена однозначно.

Но так как концы γ_{n_k} отображаются в концы катета (возможно, в один и тот же), то в силу равномерной непрерывности отображения из предыдущего мы получили бы, что, начиная с некоторого k, образы всех γ_{n_k} лежат в произвольной близости от одного из концов катета; это же противоречит нашему допущению.

Итак, в случае, когда для всех точек $z \in \{\gamma_n\} \cap \mathfrak{P}'$ область $\mathfrak{g}$ лежит вне угла $\widehat{\tau_1, \tau_2}(z)$, прообраз любой точки катета на γ конечен. Но это же верно и в случае, когда для некоторой точки $z' \in \{\gamma_n\} \cap \mathfrak{P}'$ область $\mathfrak{g}$ лежит внутри угла $\widehat{\tau_1, \tau_2}(z')$, так как такая точка должна быть единственной; при этом, если $z' \in \gamma_n$, то — в отличие от предыдущего — одной точке катета Δ' может соответствовать на γ_n не более четырех точек.

Лемма 43 доказана.

Пусть $\mathfrak{R}$, $\overline{\mathfrak{R}} \subset \mathfrak{D}'$ — произвольный ромб со сторонами, параллельными сторонам вертикальных углов $V(z)$, $z \in \mathfrak{P}'$. Как было указано в замечании перед леммой 40, для завершения доказательства теоремы 21 достаточно показать, что образ множества $\overline{\mathfrak{R}} \cap \mathfrak{P}'$ нигде не плотен на плоскости w; это мы и сделаем на основании предыдущих лемм, а также леммы 25 главы III.

Лемма 45. *Если функция* $w(z)$ *удовлетворяет условиям* 1)—5), *то образ множества* $\overline{\mathfrak{R}} \cap \mathfrak{P}'$ *при отображении* $w = w(z)$ *нигде не плотен на плоскости* w.

Доказательство. Выше было показано, что образ λ_1 границы λ ромба $\mathfrak{R}$ нигде не плотен на плоскости.

Допустим, что лемма неверна; тогда образ множества $\overline{\mathfrak{R}} \cap \mathfrak{P}'$ содержит внутренние точки и, следовательно, найдется круг $\mathfrak{K}$, принадлежащий этому образу; так как λ_1 нигде не плотно на плоскости, то круг $\mathfrak{K}$ можно выбрать так, чтобы $\overline{\mathfrak{K}} \cap \lambda_1 = 0$.

По лемме 25 круг $\mathfrak{K}$ содержит подмножество $\mathfrak{E}$ всюду второй категории, такое, что каждой точке $w' \in \mathfrak{E}$ в $\mathfrak{R}$ соответствует бесконечное множество точек $\{z'_n\}$ аналитичности функции $w(z)$

$$w(z'_n) = w'.$$

Мы найдем точку $\mathfrak{E}$, где это не имеет места, что и явится искомым противоречием.

Через каждую точку не более чем счетного множества $\varkappa$ проведем вертикальную прямую $u = \mathrm{const}$; совокупность всех этих прямых образует, очевидно, множество первой категории на плоскости. Поэтому в круге $\mathfrak{K}$ найдется точка $w_0 \in \mathfrak{E}$, не принадлежащая ни одной из указанных прямых.

Построим теперь в $\mathfrak{K}$ равнобедренный треугольник Δ с основанием, параллельным оси u, и высотой, проходящей через точку w_0, так, чтобы эта точка явилась серединой высоты; высота отделяет от Δ его левую половину Δ'. Так как $\varkappa$ не более чем счетно, то с помощью подобного преобразования с центром подобия в w_0 можно добиться того, чтобы контур Δ не пересекал $\varkappa$; высота его не пересекает $\varkappa$ по построению.

Пусть $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}'$ — полные прообразы в $\mathfrak{R}$ треугольников Δ и Δ' соответственно, а $\mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{D}$, $\mathfrak{g}'_m \subset \mathfrak{D}'$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$ — их (жордановы) компоненты: очевидно, $\mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$. Ясно, что прообраз M точки w_0 содержится в $\mathfrak{D}$; мы покажем, что он содержит лишь конечное число точек аналитичности функции $w(z)$: это и докажет лемму.

Возьмем произвольную компоненту $\mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{D}$ и совокупность $\{\mathfrak{g}'_{m_k}\}$ компонент $\mathfrak{D}'$, принадлежащих $\mathfrak{g}_n$; легко видеть, что $\mathfrak{g}_n$ имеет общие граничные точки с каждой из $\mathfrak{g}'_{m_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, прообраз M точки w_0 не содержит внутренних точек из $\mathfrak{D}'$. Рассмотрим поэтому точки $z \in M \cap \mathfrak{g}_n$, являющиеся граничными точками множества $\mathfrak{D}'$; одно из двух: либо в произвольной окрестности z находятся точки бесконечного множества компонент $\mathfrak{g}'_{m_k}$, либо в некоторой окрестности z их конечное число.

Образы границ областей $\mathfrak{g}'_{m_k}$, попавших в окрестность z, всегда лежат на контуре Δ'; поэтому легко показать, что в первом случае точка z не может быть точкой аналитичности $w(z)$. Во втором же случае, если z является точкой аналитичности $w(z)$, то из однолистности последней вблизи z (ведь $w_0 \notin \varkappa$) следует, что в некоторой окрестности z лежат точки только одной компоненты $\mathfrak{g}'_{m_k}$, т. е. z лежит на контуре $\mathfrak{g}'_{m_k}$. Но на контуре каждой из компонент $\mathfrak{g}'_{m_k}$ в силу леммы 43 находится лишь конечное множество точек из M; покажем, что таких компонент, содержащих на контуре точки M, также конечное число. В самом деле, в противном случае нашлась бы бесконечная совокупность компонент $\mathfrak{g}'_{m_k}$, на контуре каждой из которых имеется точка из M; чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что эта совокупность совпадает с $\{\mathfrak{g}'_{m_k}\}$. Но так как по лемме 42 $d(\mathfrak{g}'_{m_k}) \to 0$ и каждая $\mathfrak{g}'_{m_k}$ имеет общие граничные точки с $\mathfrak{g}_n$, то, очевидно, можно считать, что области $\overline{\mathfrak{g}'_{m_k}}$ сходятся в некоторой граничной точке ζ области $\mathfrak{g}_n$. Но тогда $\zeta \in M$ в силу замкнутости M. В силу же леммы 40 точке ζ может соответствовать только точка на контуре равнобедренного треугольника Δ, чего не может быть, так как w_0 взята внутри Δ.

Далее, ни одна точка $z \in M$, принадлежащая множеству $\mathfrak{g}_n \setminus \overline{\bigcup_k \mathfrak{g}'_{m_k}}$, не может быть точкой аналитичности $w(z)$; действительно, иначе некоторая окрестность z отображалась бы на окрестность точки w_0 и, следовательно, первая всегда содержала бы точки $\mathfrak{D}'$, т. е. $z \in \overline{\mathfrak{D}'} \bigcap \mathfrak{g}_n \subset \overline{\bigcup_k \mathfrak{g}'_{m_k}}$, что противоречиво.

Из всего изложенного следует, что в произвольной компоненте $\mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{D}$ находится лишь конечное число точек M, являющихся точками аналитичности функции $w(z)$. Теперь, точно так же как выше было для случая компонент $\mathfrak{D}'$, на основании той же леммы 42, легко доказываем, что компонент $\mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{D}$, действительно содержащих точки M, — конечное число.

Отсюда по доказанному выше и следует, что выбранной точке $w_0 \in \mathfrak{E}$ соответствует внутри $\mathfrak{R}$ лишь конечное число точек аналитичности функции $w(z)$, вопреки определению множества $\mathfrak{E}$.

Тем самым лемма 45, а с ней и теорема 21, доказана.

Было бы интересно доказать теорему 21, как и предыдущие, сведением к однолистному случаю, пользуясь теоремой 9.

Это, например, можно было бы сделать, если бы было доказано следующее утверждение: *для функции* $w(z)$ *со* *свойствами* 1)—5) (см. стр. 151—152) *множества* $\mathfrak{M}_z^{(\mathfrak{P}')}$ *ее производных чисел, взятых относительно* $\mathfrak{P}'$, *не являются полными плоскостями для множества точек* $z \in \mathfrak{P}'$ *не первой категории на* $\mathfrak{P}$.

Основные теоремы этой главы можно объединить следующим образом:

Теорема 22. *Пусть непрерывное отображение* $w = f(z)$ *области* $\mathfrak{D}$ *в каждой ее точке, исключая не более чем счетное их множество, обладает одним из свойств:*

1) *свойство* K'';
2) $\lim\limits_{r \to 0} H(z, r) = 1$;
3) *свойство* K';
4) *свойство* K'''.

Если в каждой U*-точке* (*в случае, когда они имеются*), *в которой выполнено свойство* 1) *или* 2), *отображение* $w = f(z)$ *является прямым, то* $f(z)$ *есть аналитическая функция всюду внутри* $\mathfrak{D}$.

Мы не будем приводить доказательства этой теоремы, которое аналогично доказательству теоремы 7 (глава 2). Укажем лишь, что, как и обычно, сначала находим открытое всюду плотное множество точек аналитичности функции $f(z)$, а затем на основании теорем 8 и 9 сводим вопрос к однолистным функциям так, как это сделано в каждом из случаев 1), 2), 3) и 4) (см. §§ 2, 3, 5).

§ 7. Об условиях Коши — Римана

Из доказанной в предыдущем параграфе теоремы 21 вытекает теорема Лумана — Меньшова, если лучи t_i ($i = 1, 2$) в определении свойства K''' взять параллельными осям координат. Отсюда, между прочим, следует, что в формулировке теоремы Лумана — Меньшова можно требовать лишь существования односторонних частных производных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ (но по каждой из координат x и y — с одной и той же стороны). Итак, если, например, условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{23}$$

выполнены всюду в области $\mathfrak{D}$, то непрерывная функция $f(z)=u+iv$ является аналитической также всюду в $\mathfrak{D}$. Известно, что без добавочных предположений относительно функций u, v этот вывод уже не верен (см., например, введение). И все же можно высказать некоторые небезынтересные утверждения о произвольных функциях, удовлетворяющих условиям Коши — Римана.

Введем сначала одно понятие. Пусть $\mathfrak{P}$ — некоторое замкнутое множество в области $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{d}$ — подобласть $\mathfrak{D}$, для которой $\bar{\mathfrak{d}}\subset\mathfrak{D}$. Замыкание порции $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{d}$ мы назовем *замкнутой порцией* множества $\mathfrak{P}$; очевидно, замкнутая порция компактна и полностью принадлежит области $\mathfrak{D}$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 23. *Пусть в области $\mathfrak{D}$ заданы конечные функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, обладающие всюду конечными частными производными, для которых почти всюду в $\mathfrak{D}$ выполнены условия* (23). *Тогда функция $f(z)=u+iv$ является аналитической в $\mathfrak{D}$, причем множество $\mathfrak{P}$ всех ее особых точек внутри $\mathfrak{D}$ всюду разрывно; более того, проекция каждой замкнутой порции множества $\mathfrak{P}$ как на ось Ox, так и на ось Oy есть линейное замкнутое всюду разрывное множество.*

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что область $\mathfrak{D}$ есть квадрат со сторонами, параллельными осям координат.

Обозначим через $\mathfrak{D}_n$ множество точек $z=x+iy\in\mathfrak{D}$, для которых одновременно выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
|u(x+h, y)-u(x, y)| &\leqslant n\,|h|,\\
|v(x+h, y)-v(x, y)| &\leqslant n\,|h|,\\
|u(x, y+k)-u(x, y)| &\leqslant n\,|k|,\\
|v(x, y+k)-v(x, y)| &\leqslant n\,|k|
\end{aligned}$$

при всех $|h|\leqslant\frac{1}{n}$ и $|k|\leqslant\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Очевидно, что в наших условиях

$$\mathfrak{D}=\bigcup_n\mathfrak{D}_n.$$

Из условий теоремы следует далее, что функция $f(z)=$ $=u+iv$ непрерывна вдоль каждой прямой $x=\text{const}$ и

$y = \text{const}$; поэтому в силу одной леммы Г. П. Толстова [21] множество $\mathfrak{D}_n$ замкнуто в $\mathfrak{D}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Возьмем произвольную область $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{D}$; обозначая через $\mathfrak{d}_n$ пересечение $\mathfrak{d}$ с замкнутым множеством $\mathfrak{D}_n$, очевидно, получим

$$\mathfrak{d} = \bigcup_n \mathfrak{d}_n.$$

Так как $\mathfrak{d}$ — множество второй категории, то найдется квадрат $\overline{\mathfrak{d}}' \subset \mathfrak{d}$, на котором одно из множеств $\mathfrak{d}_n$ всюду плотно; но эти множества замкнуты (в $\mathfrak{d}$), поэтому квадрат $\mathfrak{d}'$ полностью принадлежит некоторому множеству $\mathfrak{d}_n$. Будем считать, что сторона квадрата $\mathfrak{d}'$ меньше $\frac{1}{n}$. Тогда в силу определения множества $\mathfrak{D}_n$ функция $f(z) = u + iv$ удовлетворяет в $\mathfrak{d}'$ условию Липшица (ср. приложение, § 1, пример 1) и, в частности, является непрерывной функцией. В силу теоремы Лумана — Меньшова[1] $f(z)$ аналитична всюду внутри $\mathfrak{d}' \subset \mathfrak{d}$.

Так как область $\overline{\mathfrak{d}} \subset \mathfrak{D}$ была выбрана произвольно, то из доказанного следует, что в области $\mathfrak{D}$ существует открытое всюду плотное множество $\mathfrak{O}$, в каждой точке которого функция $f(z)$ является аналитической. Следовательно, множество $\mathfrak{P} = \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{O}$ всех особых точек функции $f(z)$ замкнуто и нигде не плотно в $\mathfrak{D}$.

Для доказательства последнего утверждения теоремы введем следующее понятие: замкнутое множество на плоскости назовем $\mathfrak{K}$-*множеством* относительно одной из осей координат, если проекция каждой его замкнутой порции на эту ось содержит невырожденный отрезок. Из этого определения следует, что всякое $\mathfrak{K}$-множество совершенно.

Докажем теперь такую лемму:

Лемма 46. *Если проекция замкнутого множества $\mathfrak{P}$ на одну из осей координат содержит невырожденный отрезок, то $\mathfrak{P}$ содержит некоторое $\mathfrak{K}$-множество относительно этой оси.*

Доказательство. Для определенности будем считать, что проекция $\mathfrak{P}$ на ось *Ox* содержит отрезок.

---

[1] Или леммы 11.

Обозначим через $\{\mathfrak{q}_m\}$ $(m=1, 2, \ldots)$ совокупность всех квадратов с рациональными сторонами и с центрами в рациональных точках плоскости: стороны $\mathfrak{q}_m$ параллельны осям координат. Через $\mathfrak{q}'_m$ обозначим квадрат указанной совокупности, такой, что $\overline{\mathfrak{q}'_m}\subset\mathfrak{D}$ и проекция замкнутой порции $\overline{\mathfrak{P}\cap\mathfrak{q}'_m}$ есть (замкнутое) всюду разрывное множество на оси x.

Часть — возможно, пустая — $\mathfrak{P}'$ множества $\mathfrak{P}$, принадлежащая всем квадратам $\mathfrak{q}'_m$, является открытым на $\mathfrak{P}$ множеством. Очевидно, проекция $\mathfrak{P}'$ есть множество первой категории на оси Ox и, следовательно, не может содержать отрезок. Поэтому в силу условия леммы проекция замкнутого множества $\mathfrak{P}_0=\mathfrak{P}\setminus\mathfrak{P}'$ содержит невырожденный отрезок, т. е. $\mathfrak{P}_0$ не пусто. Покажем, что оно является $\mathfrak{K}$-множеством.

Допустим противное. Тогда для некоторой области $\mathfrak{d}$, $\overline{\mathfrak{d}}\subset\mathfrak{D}$, проекция замкнутой порции $\overline{\mathfrak{P}_0\cap\mathfrak{d}}$ была бы всюду разрывна. Очевидно, существует квадрат $\mathfrak{q}_m$, содержащий точки $\mathfrak{P}_0$, и такой, что $\overline{\mathfrak{q}}_m\subset\mathfrak{d}$; ясно, что проекция пересечения $\mathfrak{P}_0\cap\overline{\mathfrak{q}}_m$ также разрывна. Так как проекция множества $(\mathfrak{P}\setminus\mathfrak{P}_0)\cap\overline{\mathfrak{q}}_m$, принадлежащего к $\mathfrak{P}'$, есть множество первой категории на оси Ox, то и в целом проекция пересечения

$$\mathfrak{P}\cap\overline{\mathfrak{q}}_m\supset\overline{\mathfrak{P}\cap\mathfrak{q}_m}$$

есть множество первой категории; но это пересечение замкнуто, поэтому его проекция есть замкнутое всюду разрывное множество точек на оси Ox, т. е. $\mathfrak{q}_m$ есть один из квадратов $\mathfrak{q}'_m$. Это же противоречиво, так как $\mathfrak{P}_0$ принадлежит дополнению ко всем квадратам $\mathfrak{q}'_m$ и не может иметь точки внутри какого-либо из них.

Лемма 46 доказана.

Вернемся к условиям теоремы 23. Предполагая, вопреки ее утверждению, что проекция одной из замкнутых порций множества $\mathfrak{P}$, например, на ось Ox содержит невырожденный отрезок, найдем по лемме 46 совершенное $\mathfrak{K}$-множество $\mathfrak{P}_0\subset\mathfrak{P}$ относительно оси Ox.

Обозначая через $\mathfrak{P}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ пересечение $\mathfrak{P}_0$ с замкнутым множеством $\mathfrak{D}_n$, получим

$$\mathfrak{P}_0 = \bigcup_n \mathfrak{P}_n.$$

Как и обычно, находим порцию $\mathfrak{P}_0' = \mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{q}$ ($\overline{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{D}$ — квадрат), принадлежащую одному из множеств $\mathfrak{P}_n$; ясно, что и $\overline{\mathfrak{P}}_0' \subset \mathfrak{P}_n$. Легко видеть (ср. приложение, § 1, пример 2), что функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, рассматриваемые лишь на множестве $\overline{\mathfrak{P}}_0'$, удовлетворяют на нем условию Липшица и, в частности, являются ограниченными, т. е.

$$|u(z)|, \quad |v(z)| < M \quad \text{при} \quad z \in \overline{\mathfrak{P}}_0'$$

(M — постоянная).

Выберем произвольную точку $z \in \mathfrak{P}_0'$ и квадрат $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$ с центром в z и стороной, меньшей $\frac{1}{n}$. Так как $\mathfrak{P}_0$ есть $\mathfrak{K}$-множество относительно Ox, то проекция замкнутой порции $\overline{\mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{q}'}$ содержит невырожденный отрезок $[x_1, x_2]$; часть квадрата $\mathfrak{q}'$, проектирующаяся на этот отрезок, есть некоторый прямоугольник $\mathfrak{r}$, содержащий, очевидно, точки $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{P}_0$ внутри.

Покажем, что внутри $\mathfrak{r}$ функции $u(z)$, $v(z)$ ограничены. В самом деле, возьмем произвольную точку $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathfrak{r}$; тогда $x_0 \in [x_1, x_2]$ и, следовательно, на прямой $x = x_0$ найдется по крайней мере одна точка из $\overline{\mathfrak{P}_0 \cap \mathfrak{q}'}$, которую обозначим через z^*. Но

$$|u(z^*) - u(z_0)| \leqslant n\,|z^* - z_0| \leqslant 1,$$
$$|v(z^*) - v(z_0)| \leqslant n\,|z^* - z_0| \leqslant 1,$$

а так как $|u(z^*)|$, $|v(z^*)| < M$, то

$$|u(z_0)|, \quad |v(z_0)| < M + 1.$$

Но тогда в силу теоремы Толстова функция $f(z) = u + iv$ должна быть аналитической всюду внутри прямоугольника $\mathfrak{r}$, содержащего точки $\mathfrak{P}$, чего не может быть, так как точки из $\mathfrak{P}$ предположены действительно особыми для $f(z)$.

Тем самым теорема 23 доказана полностью.

Не известно, может ли множество $\mathfrak{P}$ в условиях теоремы фактически содержать совершенное ядро.

Можно показать (ср. [50]), что каждая точка из $\mathfrak{P}$ обладает свойством, аналогичным свойству изолированной существенно особой точки; именно в любой окрестности каждого $z \in \mathfrak{P}$ функция $w = f(z)$ принимает, и притом бесчисленное множество раз, почти каждое конечное значение.

Весьма возможно, что функция $f(z)$ с подобным свойством не является суммируемой вблизи $\mathfrak{P}$; если это так, то указанную выше теорему Толстова можно будет усилить, заменив в ней условие ограниченности $f(z)$ условием суммируемости.

Из нерешенных задач, связанных с условиями Коши — Римана, отметим еще следующее утверждение, которое явилось бы весьма сильным обобщением теоремы Лумана — Меньшова: *пусть для непрерывной в области* $\mathfrak{D}$ *функции* $f(z) = u + iv$ *на каждой прямой* $x = \text{const}$ *и* $y = \text{const}$ *функции* u, v *обладают* N*-свойством и*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

в тех точках, где эти частные производные существуют одновременно; тогда $f(z)$ *является аналитической всюду в* $\mathfrak{D}$.

§ 8. Моногенность на множестве

Функция $f(z)$, заданная на некотором плоском множестве $\mathfrak{E}$, называется *моногенной в точке* $z_0 \in \mathfrak{E}$ *по множеству* $\mathfrak{E}$ — или *относительно* $\mathfrak{E}$ — если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'_{\mathfrak{E}}(z_0), \qquad z_0 + \Delta z \in \mathfrak{E},$$

который называется производной функции $f(z)$ по множеству $\mathfrak{E}$.

Скажем, что $f(z)$ обладает в области $\mathfrak{D}$ неполной моногенностью, если

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{l} \mathfrak{E}_l \qquad (l = 1, 2, \ldots),$$

причем $\mathfrak{E}_i \cap \mathfrak{E}_j = 0$ при $i \neq j$ и $f(z)$ моногенна на каждом $\mathfrak{E}_i$ (относительно $\mathfrak{E}_i$).

Помпейю высказал[1] без доказательства следующую теорему.

Теорема 24. *Если непрерывная функция $f(z)$ обладает неполной моногенностью в области $\mathfrak{D}$, то она является аналитической всюду в $\mathfrak{D}$.*

Для доказательства этой теоремы приведем некоторые леммы.

Лемма 47. *Пусть непрерывная в области $\mathfrak{D}$ функция $f(z)$ имеет полный дифференциал в некоторой точке $z \in \mathfrak{D}$ относительно множества $\mathfrak{E}$, контингенция которого в этой точке содержит по крайней мере два луча, расположенных на различных прямых. Если функция $f(z)$ имеет обычный полный дифференциал в этой же точке, то он совпадает с относительным дифференциалом.*

Доказательство. По условию леммы имеем одновременно

$$\Delta f = \tilde{f}_z \Delta z + \tilde{f}_{\bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z),$$

где $\tilde{f}_z$, $\tilde{f}_{\bar{z}}$ — коэффициенты относительного дифференциала $(z + \Delta z \in \mathfrak{E})$, и

$$\Delta f = f_z \Delta z + f_{\bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z)$$

для любых $z + \Delta z \in \mathfrak{D}$.

Выберем две последовательности значений $\Delta z = |\Delta z| e^{i\alpha}$ так, чтобы точки $z + \Delta z \in \mathfrak{E}$ сходились к z по двум путям с двумя полукасательными $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ в точке z. Из написанных равенств получим одновременно

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} \to \tilde{f}_z + \tilde{f}_{\bar{z}} e^{-2i\alpha}, \qquad \alpha = \alpha_1,\ \alpha_2$$

и

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} \to f_z + f_{\bar{z}} e^{-2i\alpha}, \qquad \alpha = \alpha_1,\ \alpha_2.$$

Так как $\alpha_1 \not\equiv \alpha_2 \pmod{\pi}$, то отсюда легко следует, что $\tilde{f}_z = f_z$ и $\tilde{f}_{\bar{z}} = f_{\bar{z}}$.

---

[1] Заметим, кстати, что Помпейю предполагал конечное разбиение области $\mathfrak{D}$ на множества $\mathfrak{E}_i$.

Лемма 47 доказана.

В силу теоремы о точках плотности (см. [20]) произвольное плоское множество $\mathfrak{E}$ в каждой своей точке, исключая множество плоской меры нуль, имеет контингенцию — полную плоскость; поэтому из леммы 47 следует

Лемма 48. *Если функция $f(z)$ дифференцируема относительно множества $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{D}$ в каждой его точке и обладает почти всюду на $\mathfrak{E}$ обычным полным дифференциалом, то он совпадает с относительным полным дифференциалом почти всюду на $\mathfrak{E}$.*

Заметим еще, что множество $\mathfrak{E}$ может оказаться неизмеримым, но термин «почти всюду», очевидно, имеет смысл для произвольных множеств.

Лемма 49. *Пусть непрерывная в области $\mathfrak{D}$ функция $f(z)$ является аналитической вне некоторого совершенного множества $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{D}$, причем*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant n\,|z_2 - z_1|$$

для любых $z_1, z_2 \in \mathfrak{P}$ (n — постоянная). Если

1) *производная $f'(z)$ суммируема в $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$ и*

2) *функция $f(z)$ обладает неполной моногенностью в $\mathfrak{D}$, то $f(z)$ является аналитической функцией всюду внутри области $\mathfrak{D}$.*

Доказательство. Как и в лемме 11, применяя теорему Фубини, легко покажем, что в наших условиях почти на каждом сечении x, $y = \mathrm{const}$ области $\mathfrak{D}$ функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является абсолютно непрерывной. Отсюда следует, что множество точек $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{D}$, в которых хотя бы одна из частных производных функций u, v не существует, пересекается указанными прямыми x, $y = \mathrm{const}$ вдоль линейных множеств меры нуль. Но так как, очевидно, частные производные u, v — измеримые функции, то и множество $\mathfrak{E}$ измеримо, а потому $\operatorname{Mes} \mathfrak{E} = 0$. Это означает, что все эти частные производные существуют почти всюду в области $\mathfrak{D}$ и, следовательно, почти всюду на $\mathfrak{P}$; другими словами, существует измеримое множество $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$ такое, что $\operatorname{Mes} \mathfrak{Q} = \operatorname{Mes} \mathfrak{P}$ и через каждую точку $z \in \mathfrak{Q}$ проходят две прямые $t_1(z)$, $t_2(z)$, параллельные осям координат, вдоль которых существуют конечные пределы

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \qquad z + h \in t_i(z) \qquad (i = 1,\ 2).$$

Далее, функция $f(z)$ на $\mathfrak{P}$ удовлетворяет условию Липшица; следовательно, можно считать, что в точках $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$ функция $f(z)$ имеет полный дифференциал относительно $\mathfrak{P}$ (приложение, § 2).

На основании леммы 18 заключаем теперь, что почти всюду на $\mathfrak{P}$, а потому и почти всюду в $\mathfrak{D}$ функция $f(z)$ имеет (обычный) полный дифференциал

$$\Delta f = f_z \Delta z + f_{\bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z).$$

Из моногенности функции $f(z)$ в точке $z \in \mathfrak{E}_l$ (относительно $\mathfrak{E}_l$) следует, что

$$\Delta f = f'_{\mathfrak{E}_l}(z) \Delta z + o(\Delta z), \tag{24}$$

$$z + \Delta z \in \mathfrak{E}_l.$$

Так как совокупность всех $\mathfrak{E}_l$ — не более чем счетна и $\bigcup\limits_l \mathfrak{E}_l = \mathfrak{D}$, то в силу леммы 48 относительный полный дифференциал (24) функции $f(z)$ совпадает с обычным дифференциалом почти всюду в $\mathfrak{D}$; в частности, почти для всех $z \in \mathfrak{P}$ имеем

$$\Delta f = f'(z) \Delta z + o(\Delta z),$$

где $f'(z) = f'_{\mathfrak{E}_l}(z)$ для $z \in \mathfrak{E}_l \cap \mathfrak{P}$ $(l = 1, 2, \ldots)$. Это означает, что $f(z)$ моногенна почти всюду в $\mathfrak{D}$.

Так как из условий леммы ясно, что производная $f'(z)$ суммируема в области $\mathfrak{D}$, то по лемме 11 функция $f(z)$ аналитична в $\mathfrak{D}$.

Теперь мы можем доказать теорему 24.

Доказательство теоремы 24.

1. Покажем сначала, что в условиях теоремы существует всюду плотное открытое множество $\mathfrak{O}$ точек аналитичности функции $f(z)$.

Положим

$$\mathfrak{E}_l^{(n)} = \underset{z}{\mathfrak{E}_l} \left\{ \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| \leqslant n, \ |z' - z| < \frac{1}{n}; \ z' \in \mathfrak{E}_l \right\}.$$

Так как, очевидно, $\mathfrak{E}_l = \bigcup\limits_n \mathfrak{E}_l^{(n)}$, то

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{l, n} \mathfrak{E}_l^{(n)} \qquad (l, n = 1, 2, \ldots).$$

Возьмем произвольную область $\overline{\mathfrak{d}}\subset\mathfrak{D}$; вводя обозначение $\mathfrak{d}_i^{(n)}=\mathfrak{d}\cap\mathfrak{E}_i^{(n)}$, получим

$$\mathfrak{d}=\bigcup_{i,n}\mathfrak{d}_i^{(n)}.$$

Так как $\overline{\mathfrak{d}}$ — второй категории (в себе и на плоскости), то найдется круг $\mathfrak{d}'\subset\mathfrak{d}$, внутри которого одно из множеств $\mathfrak{d}_i^{(n)}$ окажется всюду плотным; будем считать, что диаметр $\mathfrak{d}'$ меньше $\frac{1}{n}$.

Пользуясь теперь непрерывностью функции $f(z)$ в круге $\overline{\mathfrak{d}'}$, мы, как и в главе 1, легко получим, что для произвольных точек z, $z'\in\mathfrak{d}'$ выполняется условие

$$\left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}\right|\leqslant n.$$

В силу леммы 49 функция $f(z)$ аналитична внутри $\mathfrak{d}'\subset\mathfrak{d}$. Из произвольности области $\overline{\mathfrak{d}}\subset\mathfrak{D}$ и следует доказываемое.

2. Предположим теперь, что теорема неверна; тогда совершенное множество $\mathfrak{P}$ всех точек $\mathfrak{D}$, где $f(z)$ не является аналитической, не пусто и, согласно доказанному, нигде не плотно в $\mathfrak{D}$. Вводя обозначение $\mathfrak{P}_i^{(n)}=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{E}_i^{(n)}$, имеем

$$\mathfrak{P}=\bigcup_{i,n}\mathfrak{P}_i^{(n)}.$$

Обычным путем находим порцию $\mathfrak{P}'=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{D}'$ ($\overline{\mathfrak{D}'}\subset\mathfrak{D}$ — круг), на которой одно из множеств $\mathfrak{P}_i^{(n)}$ всюду плотно; взяв диаметр $\mathfrak{D}'$ меньшим $\frac{1}{n}$, как и выше, получим

$$|f(z')-f(z)|\leqslant n\,|z'-z|$$

для любых точек z, $z'\in\mathfrak{P}'$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(z)=f(z)+2nz;$$

для нее будем иметь

$$n\,|z_2-z_1|\leqslant|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)|\leqslant 3n\,|z_2-z_1|$$

при z_1, $z_2\in\mathfrak{P}'$. Отсюда следует, что аналитическая вне $\mathfrak{P}'$ функция $\Phi(z)$ однолистна на $\mathfrak{P}'$, а потому в силу теоремы 9 можно считать, что она однолистна и во всем круге $\mathfrak{D}'$. Но отсюда, как и в главе 2 (§ 1), следует суммируемость производной $\Phi'(z)$, а потому и $f'(z)$, в $\mathfrak{D}' \setminus \mathfrak{P}'$. Наконец, в силу леммы 49 заключаем, что $f(z)$ является аналитической всюду в круге $\mathfrak{D}' \supset \mathfrak{P}'$, что противоречит определению множества $\mathfrak{P}$.

Теорема 24 доказана.

Эта теорема показывает, что в ее условиях моногенность по множеству приводит к обычной моногенности и аналитическим функциям. Что это не всегда так, показывают хотя бы примеры произвольных дифференцируемых функций одного переменного на отрезках прямой; при этом, конечно, функцию можно выбрать не аналитической ни в одной точке.

Приведем другой, не столь тривиальный пример.

I. Пусть ABC — равнобедренный тупоугольный треугольник в плоскости z с тупым углом B. Выкинем из него открытый равнобедренный треугольник BDE вместе с основанием его $DE \subset AC$ (без концов), такой, чтобы два оставшихся треугольника ABD, BCE были подобны первоначальному треугольнику ABC. Каждый раз с остающимися треугольниками поступаем таким же образом; при этом в первом шаге получим два замкнутых треугольника ABD и BCE, во втором — четыре, ..., в n-м — 2^n треугольников $\Delta_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$ n-го ранга.

Совокупность всех треугольников n-го ранга обозначим через Δ^n:

$$\Delta^{(n)} = \bigcup_k \Delta_k^{(n)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2^n).$$

Общая часть всех замкнутых множеств $\Delta^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ является простой дугой L (плоской меры нуль); установим определенное взаимно однозначное и непрерывное соответствие между точками L и отрезком $[0, 1]$ оси t.

Поставим в соответствие двум треугольникам $\Delta_1^{(1)}$ и $\Delta_2^{(1)}$ (т. е. ABD и BCE) первого ранга два отрезка $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$; для каждого n, далее, делим отрезок $[0, 1]$ на 2^n равных отрезков $\delta_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$ и ставим их во взаимно однозначное соответствие совокупности 2^n треугольников $\Delta_k^{(n)}$ n-го ранга так, чтобы это соответствие удовлетворяло следующему условию: *если треугольники* $\Delta_{k_1}^{(n)}$ *и* $\Delta_{k_2}^{(n)}$ *имеют общую вершину, то соответствующие им отрезки* $\delta_{k_1}^{(n)}$ *и* $\delta_{k_2}^{(n)}$ *имеют общий конец, причем если* $\Delta_{k_1}^{(n_1)} \supset \Delta_{k_2}^{(n_2)}$ $(n_2 > n_1)$, *то и* $\delta_{k_1}^{(n_1)} \supset \delta_{k_2}^{(n_2)}$.

Каждая точка $z \in L$ может быть получена как пересечение некоторых треугольников $\Delta_{k_1}^{(1)}, \Delta_{k_2}^{(2)}, \ldots, \Delta_{k_n}^{(n)}, \ldots$; ей соответствует некоторая точка $t \in [0, 1]$, являющаяся пересечением соответствующих отрезков $\delta_{k_1}^{(1)}, \delta_{k_2}^{(2)}, \ldots, \delta_{k_n}^{(n)}, \ldots$ Легко видеть теперь, что различным точкам $z_1, z_2 \in L$ соответствуют при этом и различные точки $t_1, t_2 \in [0, 1]$; этим установлено взаимно однозначное и непрерывное соответствие между точками дуги L и точками отрезка $[0, 1]$ оси t, которое мы запишем в виде

$$t = f(z), \quad z \in L.$$

Докажем, что $f(z)$ моногенна в каждой точке $z \in L$ относительно L, причем $f'_L(z) = 0$. Для этого возьмем произвольные различные точки $z, z' \mid \in L$ и оценим величину $|f(z') - f(z)|$.

Пусть n — наименьший номер ранга замкнутых треугольников $\Delta_k^{(n)}, \Delta_{k'}^{(n)}$, содержащих точки z и z' и не имеющих общих точек; такие треугольники обязательно найдутся, так как z, z' — различные точки.

Отсюда следует, что z, z' принадлежат некоторому треугольнику $\Delta_k^{(n-2)}$ совокупности $\Delta^{(n-2)}$; поэтому соответствующие им точки t, t' принадлежат одному отрезку $\delta_{k_1}^{(n-2)}$, и в силу определения числа n получим

$$\frac{1}{2^n} \leqslant |t' - t| \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2^n} \leqslant |f(z') - f(z)| \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Из подобия треугольников различных рангов легко получить, что если $a_0 = a$ — боковая сторона первоначального треугольника ABC, то боковая сторона любого треугольника ранга n равна

$$a_n = \frac{a}{(2\cos\alpha)^n},$$

где α — острый угол треугольника ABC; при этом основание такого треугольника равно a_{n-1}. Напомним, что угол B — тупой, поэтому $\alpha < \frac{\pi}{4}$.

Ясно, что наименьшее расстояние между рассматриваемыми треугольниками $\Delta_k^{(n)}$, $\Delta_{k'}^{(n)} \subset \Delta_{k_1}^{(n-2)}$ равно высоте h_n выкинутого из $\Delta_{k_1}^{(n-2)}$ «среднего» треугольника, опущенной на его боковую сторону; элементарный подсчет дает $h_n = \frac{a}{(2\cos\alpha)^{n-1}} \sin 4\alpha$. Следовательно,

$$\frac{a}{(2\cos\alpha)^{n-1}} \sin 4\alpha \leqslant |z' - z| \leqslant \frac{a}{(2\cos\alpha)^{n-3}}.$$

Из полученных неравенств имеем

$$\frac{1}{8a}(\cos\alpha)^{n-3} \leqslant \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| \leqslant \frac{2}{a \sin 4\alpha}(\cos\alpha)^{n-1}.$$

Ясно, что, чем ближе одна к другой расположены точки z и z' на L, тем больше номер ранга n, для которого треугольники $\Delta_k^{(n)}$, $\Delta_{k'}^{(n)}$, содержащие эти точки, не пересекаются; отсюда следует, что если $z' \to z$, то $n \to \infty$, и из последних неравенств получаем $f'_L(z) = 0$.

II. Рассмотрим функцию

$$F(z) = f(z) + \frac{4}{a \sin 4\alpha \cos\alpha} z, \qquad z \in L,$$

где $f(z)$ — построенная нами функция; из свойств этой последней вытекает, что

$$|F(z') - F(z)| \geqslant \frac{2}{a \sin 4\alpha \cos\alpha} |z' - z|$$

для любых точек z, $z' \in L$.

Следовательно, $w = F(z)$ является непрерывным и взаимно однозначным отображением дуги L плоскости z на некоторую дугу Λ плоскости w; при этом

$$F'_L(z) = \frac{4}{a \sin 4\alpha \cos\alpha} > 0.$$

Отсюда обычным путем выведем, что отображение $w = F(z)$ дуги L на дугу Λ обладает свойством конформности в следующем обобщенном смысле: если последовательность точек $z_k \to z$, $z_k \in L$ $(k = 1, 2, \ldots)$ имеет определенную полукасательную t в точке $z \in L$, то и соответствующая ей последовательность точек $w_k \to w$, $w_k \in \Lambda$, также имеет определенную полукасательную T в точке $w \in \Lambda$ и угол между двумя полукасательными t' и t'' для различных последовательностей $\{z'_k\}$, $\{z''_k\} \subset L$ равен углу между полукасательными T' и T'' последовательностей $\{w'_k\}$, $\{w''_k\} \subset \Lambda$; при этом сохраняется и направление отсчета углов.

Это «конформное» отображение дуги осуществляется функцией $F(z)$, не связанной с аналитическими функциями; построение же подобных отображений для кривых, не имеющих касательных, представляет известные трудности.

III. Возьмем функцию $t = f(z)$, $z \in L$, построенную выше, и рассмотрим обратную функцию

$$z = \varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t), \quad t \in [0, 1].$$

Из $f'_L(z) = 0$, очевидно, следует, что производная

$$\varphi'(t) = \lim_{t' \to t} \frac{\varphi(t') - \varphi(t)}{t' - t} = \infty$$

при любом значении $t \in [0, 1]$.

Подчеркнем, что *действительные* функции не могут обладать этим свойством; именно эти последние могут иметь бесконечные производные лишь на множестве меры нуль (см. [20]).

Интересной является общая задача о структуре множеств $\mathfrak{M}_t$ производных чисел комплексной функции $f(t) = \psi_1(t) + i\psi_2(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, почти для всех t; приведенный пример показывает, что здесь нельзя ожидать полной аналогии с вещественными функциями $f(x)$, $x \in [a, b]$, и функциями $f(z)$ комплексного переменного $z \in \mathfrak{D}$.

IV. Рассмотрим снова функцию $\varphi(t)$ предыдущего пункта и положим

$$\Phi(z) = \varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$$

при $z = x + iy \in \mathfrak{Q}$, где $\mathfrak{Q}$ (0,1; 0,1) — открытый единичный квадрат.

Из дифференциальных свойств функции $\varphi(x)$, $x \in (0,1)$, следует, что в каждой точке $z \in \mathfrak{Q}$ множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ функции $\Phi(z)$ есть бесконечный континуум, содержащий начало координат $\zeta = 0$. В силу теоремы 2 главы 1 почти в каждой точке $z \in \mathfrak{Q}$ множество $\mathfrak{M}_z$ является полной плоскостью. Можно показать, что в данном случае каждое

$\mathfrak{M}_z$ содержит внутренние точки. Этот пример несколько напоминает пример, данный А. Д. Мышкисом (глава 1).

V. Функция $\Psi(z)=\varphi(x)+\varphi(y)$, где $\varphi(t)$ — пример п. III, очевидно, обладает следующим свойством: *в каждой точке z квадрата $\mathfrak{Q}$ (0,1; 0,1) вдоль прямых $l_1(z)$ и $l_2(z)$, параллельных осям координат, выполняется соотношение*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Psi(z+h)-\Psi(z)}{h}=\infty.$$

Этот пример показывает, что если допускать равенство

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\infty,\quad z+h\in t_1(z),\ t_2(z),$$

то без дополнительных ограничений теорема 21 неверна. Одним из таких ограничений, как указано на стр. 68, является существование в соответствующих точках предела

$$\lim_{h\to 0}\operatorname{Arg}\frac{f(z+h)-f(z)}{h},\quad z+h\in t_1(z),\ t_2(z).$$

Мы закончим этот параграф одной теоремой, устанавливающей некоторый критерий «стираемости» возможных особых множеств аналитической функции.

Теорема 25. *Пусть непрерывная в области $\mathfrak{D}$ функция $f(z)$ является аналитической вне некоторого совершенного множества $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{D}$, такого, что* $\operatorname{Mes}\mathfrak{P}=0$. *Если производные числа функции $f(z)$ относительно $\mathfrak{P}$ конечны в каждой точке $z\in\mathfrak{P}$, исключая не более чем счетное их множество, то $f(z)$ является аналитической всюду в области $\mathfrak{D}$. В частности, если $|f(z_2)-f(z_1)|\leqslant n\,|z_2-z_1|$ (n — постоянная) для любых z_1, $z_2\in\mathfrak{P}$, то $f(z)$ аналитична в $\mathfrak{D}$.*

Доказательство. Предполагая теорему неверной, находим совершенное множество всех точек $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{P}$, ни в одной из которых $f(z)$ не является аналитической. Полагаем

$$\mathfrak{p}_n=\mathfrak{p}_z\left\{\left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}\right|\leqslant n,\quad |z'-z|<\frac{1}{n};\quad z'\in\mathfrak{p}\right\}.$$

Каждое множество $\mathfrak{p}_n$ замкнуто ($n=1, 2, \ldots$), что доказывается, как и в главе 1; из условий теоремы следует, что $\mathfrak{p}=\bigcup_n \mathfrak{p}_n \bigcup \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ не более чем счетно.

Сумма всех $\mathfrak{p}_n$, как дополнение к $\mathfrak{h}$, есть множество второй категории на $\mathfrak{p}$; обычным путем находим порцию $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}'$ ($\mathfrak{D}'$ — круг в $\mathfrak{D}$), которая внутри $\mathfrak{D}'$ совпадает с одним из множеств $\mathfrak{p}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Взяв диаметр круга $\mathfrak{D}'$ меньшим $\frac{1}{n}$, в силу определения $\mathfrak{p}_n$ будем иметь

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant n\,|z_2 - z_1|$$

для любых точек $z_1, z_2 \in \mathfrak{p}'$. Так как для функции

$$\Phi(z) = f(z) + 2nz$$

имеем соответственно

$$n\,|z_2 - z_1| \leqslant |\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| \leqslant 3n\,|z_2 - z_1|,$$

то она однолистна на $\mathfrak{p}'$; поэтому в силу теоремы 9 можно считать, что функция $\Phi(z)$ однолистна во всем круге $\mathfrak{D}'$.

По условию $\operatorname{Mes} \mathfrak{p}' = 0$, следовательно, функция $\Phi(z)$ моногенна почти всюду в $\mathfrak{D}'$ и производная $\Phi'(z)$ суммируема; доказательство этого аналогично проводившемуся в главе 2 (§ 1). В силу леммы 11 функция $\Phi(z)$ должна быть аналитической всюду в круге $\mathfrak{D}' \supset \mathfrak{p}'$, что противоречит определению множества $\mathfrak{p}$.

Теорема 25 доказана. Пример однолистной функции

$$f(z) = z - i\int\limits_0^x c_{\mathfrak{p}}(x)\,dx,$$

где $c_{\mathfrak{p}}(x)$ — характеристическая функция совершенного разрывного множества $\mathfrak{p} \subset [0, 1]$, $\operatorname{mes} \mathfrak{p} > 0$, показывает, что в этой теореме условие $\operatorname{Mes} \mathfrak{P} = 0$ является существенным.

С другой стороны, из примеров на стр. 50 следует, что даже в предположении однолистности функции $f(z)$ одного условия $\operatorname{Mes} \mathfrak{P} = 0$ недостаточно для стираемости.

Тем не менее есть некоторые основания ожидать, что если $\mathfrak{P}$ всюду разрывно и $\operatorname{Mes} \mathfrak{P} = 0$, то однолистная функция $f(z)$ является аналитической и на $\mathfrak{P}$ (но известно (см. [51], [57]), что при $\operatorname{Mes} \mathfrak{P} > 0$ это не так).

ПРИЛОЖЕНИЕ

В настоящем приложении собраны некоторые сведения из разных разделов математики, которые необходимы для полного понимания изложенного в книге. Для удобства читателя часть результатов мы приводим с их доказательствами. Особенно подробно рассмотрено здесь понятие категории плоских множеств.

§ 1. Категория множеств

Множество $\mathfrak{G}$ конечной плоскости Ω назовем *открытым*, если оно содержит лишь внутренние точки, т. е. вместе с каждой точкой $z_0 \in \mathfrak{G}$ в нем содержится и некоторый круг $|z - z_0| < \rho(z_0)$. *Замкнутые* множества плоскости определяются тогда как дополнения открытых, взятых относительно Ω.

Из этих определений следует прежде всего, что сумма любой совокупности открытых множеств, а также пересечение конечного их числа, есть также открытое множество. Далее, в силу известных формул двойственности

$$\Omega \setminus \bigcup_\alpha \mathfrak{A}_\alpha = \bigcap_\alpha (\Omega \setminus \mathfrak{A}_\alpha),$$

$$\Omega \setminus \bigcap_\alpha \mathfrak{A}_\alpha = \bigcup_\alpha (\Omega \setminus \mathfrak{A}_\alpha),$$

в которых индекс α может пробегать множество любой мощности, заключаем, что пересечение любого числа замкнутых множеств, а также сумма конечного их числа, есть также замкнутое множество.

Положение меняется, если рассмотреть пересечения бесконечного числа открытых и суммы бесконечного числа замкнутых множеств.

Легко доказать, например, следующее утверждение:

Всякое замкнутое множество $\mathfrak{F}$ *на плоскости* Ω *есть пересечение счетного числа открытых множеств и, следовательно (в силу формул двойственности), всякое открытое множество* $\mathfrak{G} \subset \Omega$ *есть сумма счетного числа замкнутых множеств.*

Это уже дает основание ввести следующие понятия: множество, являющееся пересечением счетного числа открытых множеств, называется *множеством типа* $\mathfrak{G}_\delta$ или просто $\mathfrak{G}_\delta$-*множеством*; множество, являющееся суммой счетного числа замкнутых множеств, называется *множеством типа* $\mathfrak{F}_\sigma$ или просто $\mathfrak{F}_\sigma$-*множеством.*

Приведенное нами утверждение можно теперь сформулировать так: *открытые множества являются множествами типа* $\mathfrak{F}_\sigma$, *а замкнутые множества — множествами типа* $\mathfrak{G}_\delta$. Другие примеры $\mathfrak{F}_\sigma$- и $\mathfrak{G}_\delta$-множеств будут приведены ниже.

Из формул двойственности легко следует, что *дополнение к* $\mathfrak{F}_\sigma$-*множеству есть* $\mathfrak{G}_\delta$-*множество, а дополнение к* $\mathfrak{G}_\delta$-*множеству есть* $\mathfrak{F}_\sigma$-*множество.* Между прочим, одно и то же множество может быть одновременно и $\mathfrak{F}_\sigma$- и $\mathfrak{G}_\delta$-множеством; таковы, например, все открытые ($\mathfrak{G}$) и все замкнутые ($\mathfrak{F}$) множества, что следует из равенств

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F} \cup \mathfrak{F} \cup \ldots \cup \mathfrak{F} \cup \ldots,$$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{G} \cap \ldots \cap \mathfrak{G} \cap \ldots$$

Так как множество, состоящее из одной точки, замкнуто, то всякое счетное множество является множеством типа $\mathfrak{F}_\sigma$, и следовательно, множество, дополнительное к счетному, является множеством типа $\mathfrak{G}_\delta$. Ниже мы покажем, что *множество всех рациональных точек* плоскости Ω (т. е. точек с обеими рациональными координатами) есть $\mathfrak{F}_\sigma$-множество, не являющееся $\mathfrak{G}_\delta$-множеством; поэтому множество точек плоскости, по крайней мере одна из координат которых иррациональна, будучи $\mathfrak{G}_\delta$-множеством, не является $\mathfrak{F}_\sigma$-множеством.

Очень важное свойство $\mathfrak{G}_\delta$-множеств выражается следующей теоремой (см. [45]).

Теорема I. *Пересечение счетного числа всюду плотных на плоскости $\mathfrak{Q}$ множеств*

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n, \ldots$$

типа $\mathfrak{G}_\delta$ есть всюду плотное на $\mathfrak{Q}$ множество, очевидно, также типа $\mathfrak{G}_\delta$.

Эта теорема, вообще говоря, не имеет места, если множества $\mathfrak{M}_n$ не являются $\mathfrak{G}_\delta$-множествами. В самом деле, пусть $\mathfrak{M}_1$ есть множество всех рациональных точек

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

плоскости $\mathfrak{Q}$; положим

$$\mathfrak{M}_n = \{r_n, r_{n+1}, \ldots\}.$$

Эти множества $\mathfrak{M}_n$ всюду плотны, между тем их пересечение пусто. Отсюда, кстати, следует, что *множество $\mathfrak{M}_1$ всех рациональных точек плоскости не есть $\mathfrak{G}_\delta$-множество.* В самом деле, в противном случае $\mathfrak{G}_\delta$-множествами являлись бы и множества $\mathfrak{M}_n$, а тогда, в силу теоремы 1, пересечение $\bigcap\limits_n \mathfrak{M}_n$ было бы не пусто, что противоречиво.

Назовем теперь какое-либо множество *множеством первой категории* на плоскости $\mathfrak{Q}$, если оно может быть представлено как сумма счетного числа нигде не плотных на $\mathfrak{Q}$ множеств (в частности, всякое нигде не плотное множество есть множество первой категории).

Множество $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{Q}$ называется *множеством второй категории* на плоскости $\mathfrak{Q}$, если $\mathfrak{Q} \setminus \mathfrak{N}$ есть множество первой категории.

Очевидно, сумма конечного или счетного числа множеств первой категории есть также множество первой категории.

Легко видеть, что всякое множество первой категории содержится в некотором $\mathfrak{F}_\sigma$-множестве также первой категории. В самом деле, если $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_n \mathfrak{M}_n$, где $\mathfrak{M}_n$ — нигде не плотные множества, то каждое замыкание $\overline{\mathfrak{M}_n}$ также нигде не плотно, так что $\mathfrak{M}^* = \bigcup\limits_n \overline{\mathfrak{M}_n}$ есть $\mathfrak{F}_\sigma$-множество первой категории и, очевидно, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^*$.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема II. *Для того чтобы множество $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{Q}$ было второй категории, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало плотное в $\mathfrak{Q}$ множество типа $\mathfrak{G}_\delta$.*

Необходимость. Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{Q}$ — произвольное множество второй категории на $\mathfrak{Q}$. Тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q} \setminus \mathfrak{N}$ есть сумма счетного числа нигде не плотных множеств $\mathfrak{M}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Так как и $\overline{\mathfrak{M}}_n$ нигде не плотно, то $\mathfrak{G}_n = \mathfrak{Q} \setminus \overline{\mathfrak{M}}_n$ — всюду плотные открытые множества; значит, согласно теореме 1, всюду плотным является и множество $\bigcap\limits_n \mathfrak{G}_n$ типа $\mathfrak{G}_\delta$, содержащееся в $\mathfrak{N} = \bigcap\limits_n (\mathfrak{Q} \setminus \mathfrak{M}_n)$.

Достаточность. Пусть множество $\mathfrak{N}$ содержит плотное в $\mathfrak{Q}$ множество $\mathfrak{N}_0$ типа $\mathfrak{G}_\delta$. Ясно, что $\mathfrak{N}_0$ есть пересечение открытых множеств $\mathfrak{G}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, также плотных в $\mathfrak{Q}$. Дополнение $\mathfrak{M}_0$ к $\mathfrak{N}_0$ содержит дополнение к $\mathfrak{N}$ и является суммой нигде не плотных замкнутых множеств $\mathfrak{Q} \setminus \mathfrak{G}_n$.

Теорема II доказана.

Из нее (и в силу теоремы I) вытекает, например, что дополнение к множеству первой категории на плоскости не может быть первой категории, т. е. *никакое множество не может быть одновременно множеством первой и второй категории.*

В качестве следствия теорем I и II отметим такое утверждение:

Пересечение конечного или счетного числа множеств второй категории на $\mathfrak{Q}$ есть также множество второй категории и, в частности, всюду плотно в $\mathfrak{Q}$.

Можно доказать также, что *множество второй категории на плоскости имеет в каждой своей порции мощность континуума.*

Свойства множеств второй категории, указанные во всех этих утверждениях, напоминают соответствующие свойства измеримых плоских множеств полной меры в какой-либо области (или измеримых линейных множеств полной меры на каком-либо отрезке) и указывают на то, что множества второй категории необходимо рассматривать как чрезвычайно сгущенные. Отличие же проявляется уже в том, что множество второй категории может иметь меру нуль (или вообще быть неизмеримым). Ниже, в примерах 2 и 3, мы укажем на другое, *качественное* отличие множеств второй категории от множеств полной меры.

Мы рассмотрели множества первой и второй категорий на плоскости $\mathfrak{Q}$. Но категорию можно определить и для множеств, отличных от всей плоскости $\mathfrak{Q}$; остановимся вкратце на важном для нас случае совершенных множеств на $\mathfrak{Q}$.

Пусть $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}$ — произвольное совершенное множество. Его подмножество $\mathfrak{P}'$ назовем открытым на $\mathfrak{P}$ — или относительно $\mathfrak{P}$, — если оно является пересечением $\mathfrak{P}$ с некоторым открытым множеством $\mathfrak{G}$ на плоскости $\mathfrak{Q}$: $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{G}$; открытые множества на $\mathfrak{P}$ называются его порциями или кусками. Замкнутые множества на $\mathfrak{P}$ определим как дополнения (до $\mathfrak{P}$) к открытым множествам; очевидно, замкнутое относительно $\mathfrak{P}$ множество является одновременно абсолютно замкнутым, т. е. замкнутым на плоскости $\mathfrak{Q}$.

Множество $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}$ называется *плотным* в каком-либо куске множества $\mathfrak{P}$, если каждая порция этого куска содержит точки $\mathfrak{M}$; множество $\mathfrak{M}$ называется *нигде не плотным* на $\mathfrak{P}$, если оно не плотно ни в каком куске множества $\mathfrak{P}$. Теперь можно говорить и о множествах первой и второй категорий на $\mathfrak{P}$, а также о $\mathfrak{F}_\sigma$- и $\mathfrak{G}_\delta$-множествах в $\mathfrak{P}$. Легко показать, что все утверждения этого параграфа остаются в силе и для множеств на $\mathfrak{P}$.

Подчеркнем лишь, что любое счетное подмножество совершенного множества $\mathfrak{P}$ — всегда первой категории на $\mathfrak{P}$.

Замечание 1. Совершенное множество $\mathfrak{P}$ может быть первой категории на плоскости $\mathfrak{Q}$, хотя в себе оно всегда второй категории; это имеет место, если $\mathfrak{P}$ нигде не плотно на $\mathfrak{Q}$. Наоборот, легко привести пример множества первой категории в себе и, тем более, в объемлющем его множестве; таким является, например, множество рациональных точек плоскости или, как более общий случай, сумма счетного числа нигде не плотных замкнутых множеств, которая сама плотна на плоскости.

Замечание 2. Множества второй категории на $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}$, определенные выше, называют еще множествами всюду второй категории на $\mathfrak{P}$. Такая терминология оправдывается тем, что на $\mathfrak{P}$ всегда существуют множества $\mathfrak{M}$ не первой категории, которые в то же время не являются и множествами второй категории согласно приведенному выше определению; например, если $\mathfrak{P}$ — замкнутый круг $|z| \leqslant 1$, то таким множеством будет полукруг $|z| \leqslant 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Но для любого $\mathfrak{B}$-множества $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}$ (например, типа $\mathfrak{F}_\sigma$ или $\mathfrak{G}_\delta$) не первой категории найдется порция $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, на замыкании которой оно будет уже множеством всюду второй категории. Не известно, существует ли множество не первой категории, каждая порция которого не есть множество всюду второй категории.

Прежде чем приводить примеры, отметим еще один результат (ср. [20]), который следует из предложения, аналогичного теореме II:

Каждое множество типа $\mathfrak{G}_\delta$ на плоскости является множеством (всюду) второй категории в своем замыкании и, тем более, в себе.

Примеры.

1. Построим пример множества меры нуль и второй категории на плоскости $\mathfrak{E}$. Сделаем большее: построим множество $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{E}$ второй категории, длина которого, по Каратеодори (ср. [20]), равна нулю, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ точки множества $\mathfrak{N}$ можно заключить внутрь счетного числа замкнутых кривых, сумма диаметров которых меньше ε.

В самом деле, возьмем фиксированное счетное всюду плотное на $\mathfrak{E}$ множество точек

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

и последовательность чисел $\{\varepsilon_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно стремящихся к нулю: $\varepsilon_k \searrow 0$.

Для каждого k положим

$$\mathfrak{G}_k = \bigcup_n \mathfrak{K}\left(z_n, \frac{\varepsilon_k}{2^{n+1}}\right),$$

где $\mathfrak{K}\left(z_n, \frac{\varepsilon_k}{2^{n+1}}\right)$ — открытый круг радиуса $\frac{\varepsilon_k}{2^{n+1}}$ и с центром в точке z_n. Ясно, что окружности этих кругов в совокупности заключают множество $\mathfrak{G}_k$, а сумма их диаметров равна $2\sum_n \frac{\varepsilon_k}{2^{n+1}} = \varepsilon_k$. Так как $\varepsilon_k \searrow 0$, то $\mathfrak{G}_k \supset \mathfrak{G}_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$

Очевидно, все $\mathfrak{G}_k$ суть открытые множества, плотные на плоскости; поэтому в силу теорем I и II пересечение

$\mathfrak{N} = \bigcap\limits_k \mathfrak{G}_k$ есть множество второй категории на $\mathfrak{Q}$. Так как $\varepsilon_k \to 0$, то легко показать, что длина $\mathfrak{N}$ равна нулю.

Ясно, что подобное построение можно провести и для любого совершенного множества $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}$.

2. Существует пример (см. [47]) функции $f(x, y)$, непрерывной в некоторой области $\mathfrak{D}$, имеющей конечные частные производные почти всюду в $\mathfrak{D}$, но все же лишенной полного дифференциала в каждой точке этой области. Покажем, что для такой функции множество $\mathfrak{E}$ точек существования конечных частных производных может быть множеством только первой категории (хотя оно и полной меры). Докажем большее:

Если непрерывная функция $f(x, y)$ имеет конечные частные производные числа по x и по y всюду на некотором множестве $\mathfrak{E}$ второй категории в области $\mathfrak{D}$ (хотя бы и меры нуль), то существует открытое всюду плотное множество $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{D}$, в окрестности каждой точки которого эта функция удовлетворяет даже условию Липшица (и, следовательно, почти всюду в $\mathfrak{O}$ обладает полным дифференциалом).

Введем множества

$$\mathfrak{E}_n = \mathop{\mathfrak{E}}_{(x,\, y)} \left\{ \left| \frac{f(x',\, y) - f(x,\, y)}{x' - x} \right| \leqslant n, \quad \left| \frac{f(x,\, y') - f(x,\, y)}{y' - y} \right| \leqslant n, \right.$$
$$\left. |x' - x| < \frac{1}{n}, \ |y' - y| < \frac{1}{n} \right\} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Легко показать (ср. главу 1, § 2), что каждое $\mathfrak{E}_n$ замкнуто в $\mathfrak{D}$ и что $\mathfrak{E} = \bigcup\limits_n \mathfrak{E}_n$.

Так как $\mathfrak{E}$ — всюду второй категории в $\mathfrak{D}$, то в каждом квадрате $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{D}$ найдется квадрат $\mathfrak{Q}'$ со сторонами, параллельными осям Ox и Oy, на котором одно из множеств $\mathfrak{E}_n$ плотно; из замкнутости $\mathfrak{E}_n$ следует, что $\mathfrak{E}_n \supset \mathfrak{Q}'$. Можно предположить, что сторона квадрата $\mathfrak{Q}'$ выбрана меньше $\frac{1}{n}$. Тогда по определению множества $\mathfrak{E}_n$ получим условие Липшица

$$|f(x_2,\, y_2) - f(x_1,\, y_1)| \leqslant |f(x_2,\, y_2) - f(x_1,\, y_2)| +$$
$$+ |f(x_1,\, y_2) - f(x_1,\, y_1)| \leqslant n(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_2|)$$

для любых точек $(x_1,\, y_1)$, $(x_2,\, y_2) \in \mathfrak{Q}'$.

Так как квадрат $\mathfrak{Q}$ был выбран произвольно, то найденные открытые квадраты $\mathfrak{Q}'\subset\mathfrak{Q}$ образуют в совокупности всюду плотное открытое множество $\mathfrak{Q}$.

Наше утверждение доказано. Из его доказательства в силу замечания 2 следует, что указанная выше функция $f(x, y)$ имеет конечные частные производные лишь на множестве первой категории.

Заметим еще, что построен пример функции $f(x, y)$ (см. [47]), обладающей конечными частными производными числами не просто на множестве второй категории, а даже всюду в области $\mathfrak{D}$, и все же лишенной полного дифференциала на множестве положительной меры.

Поэтому построенное выше открытое множество $\mathfrak{Q}$ может иметь произвольно малую относительно области $\mathfrak{D}$ плоскую меру.

3. Пусть $\theta(x)$ — неубывающая сингулярная канторова функция на отрезке $[0, 1]$, постоянная на каждом интервале смежности к канторовому совершенному множеству $\mathfrak{P}$.

Известно, что на $\mathfrak{P}$ существует подмножество $\mathfrak{E}$, на котором производная $\theta'(x)=+\infty$; при этом каждая порция $\mathfrak{E}$ имеет мощность континуума.

Но это множество $\mathfrak{E}$ может быть только первой категории на $\mathfrak{P}$, так как существует множество $\mathfrak{R}\subset\mathfrak{P}$ второй категории на $\mathfrak{P}$ (а потому также мощности континуума в каждой порции), на котором $\theta(x)$ не имеет ни конечной, ни бесконечной производной. Это доказывается аналогично предыдущему.

§ 2. Свойство нигде не плотных множеств

Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольное замкнутое и нигде не плотное множество на плоскости z и z_0 — какая-либо точка плоскости: z_0 может не принадлежать $\mathfrak{P}$. Через $\mathfrak{P}(r)$ обозначим пересечение $\mathfrak{P}$ с окружностью $|z-z_0|=r$. Покажем, что существует множество значений r всюду второй категории на полуоси $[0, +\infty)$ таких, что для каждого такого r множество $\mathfrak{P}(r)$ является (замкнутым и) всюду разрывным множеством точек.

Обозначим через $r(p, q, p', q')$ множество положительных чисел r, для каждого из которых множество $\mathfrak{P}(r)$ содержит целую дугу с концами $\varphi = \frac{p}{q}$ и $\varphi = \frac{p'}{q'}$:

$$0 \leqslant \frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} < 2\pi; \qquad (*)$$

при этом мы временно рассматриваем полярную систему координат с полюсом в точке z_0. Очевидно, если $\mathfrak{E}$ — множество значений радиусов r, для которых $\mathfrak{P}(r)$ содержит невырожденную дугу, то

$$\mathfrak{E} = \bigcup r(p,\ q,\ p',\ q'),$$

где суммирование распространено на всевозможные целые неотрицательные значения p, q, p', q', удовлетворяющие условиям (*).

Легко видеть, в силу замкнутости $\mathfrak{P}$, что каждое из множеств $r(p,\ q,\ p',\ q')$ является замкнутым и, следовательно, $\mathfrak{E}$ есть множество типа $\mathfrak{F}_\sigma$.

Если $\mathfrak{E}$ не есть множество первой категории, то одно из множеств $r(p,\ q,\ p',\ q')$ будет плотным на полуоси $[0,\ +\infty)$; но так как оно замкнуто, то это значит, что оно содержит некоторый сегмент $[r_1,\ r_2]$, $r_1 < r_2$. Из определения множества $r(p,\ q,\ p',\ q')$ следует теперь, что множество $\mathfrak{P}$ содержит целую дугу каждой окружности с радиусом $r \in [r_1,\ r_2]$ и с концами на лучах $\varphi = \frac{p}{q}$, $\varphi = \frac{p'}{q'}$; это же означает, что $\mathfrak{P}$ содержит внутренние точки, чего не может быть, так как $\mathfrak{P}$ нигде не плотно.

Тем самым наше утверждение доказано. Из него следует, например, что множество значений r, для которых $\mathfrak{P}(r)$ разрывно, имеет в каждой своей порции мощность континуума; в частности, окружность $|z - z_0| = r$, пересекающую $\mathfrak{P}$ по разрывному множеству $\mathfrak{P}(r)$, можно выбрать с произвольно малым радиусом r, причем так, чтобы она не проходила через точки наперед заданного счетного множества.

Мы получили свойство нигде не плотного множества при пересечении его окружностями $r = \text{const}$ при произвольном выборе полярной системы координат. Аналогичное свойство можно получить, рассматривая линии $\varphi = \text{const}$, а также x, $y = \text{const}$ и т. д. при любом выборе соответствующей системы координат.

Из полученного результата легко вывести, например, следующее свойство произвольного множества $\mathfrak{M}$ первой категории

гории на плоскости: *на оси Ox найдется множество $\mathfrak{e}$ всюду второй категории такое, что каждая прямая $x = \text{const}$, проходящая через точку $\mathfrak{e}$, пересекает $\mathfrak{M}$ вдоль линейного множества первой категории.* Соответственно для множества $\mathfrak{R}$ всюду второй категории на плоскости получим: *на оси Ox найдется множество $\mathfrak{e}$ всюду второй категории такое, что каждая прямая $x = \text{const}$, проходящая через точку $\mathfrak{e}$, пересекает $\mathfrak{R}$ вдоль линейного множества всюду второй категории.*

Все это, очевидно, весьма напоминает свойства сечений множеств меры нуль, соответственно множеств полной меры на плоскости.

§ 3. О полном дифференциале

Пусть дано некоторое множество $\mathfrak{R}$ в трехмерном пространстве. Луч l, выходящий из точки $a \in \mathfrak{R}$, называется *промежуточной полукасательной* множества $\mathfrak{R}$ в точке a, если существует последовательность $\{a_n\}$ точек множества $\mathfrak{R}$, отличных от a, сходящихся к a и таких, что последовательность лучей $\{\overrightarrow{aa_n}\}$ сходится к l. Множество всех промежуточных полукасательных множества $\mathfrak{R}$ в точке a называется контингенцией множества $\mathfrak{R}$ в точке a [1]); под контингенцией в изолированной точке множества $\mathfrak{R}$ мы будем понимать пустое множество. Если контингенция множества $\mathfrak{R}$ в точке a есть некоторая плоскость, то назовем ее *касательной плоскостью* множества $\mathfrak{R}$ в этой точке.

Для того чтобы сформулировать основное утверждение о контингенциях, введем следующее понятие: множество $\mathfrak{M}$ в трехмерном пространстве *имеет нулевую площадь*, если для каждого $\varepsilon > 0$ его можно заключить в счетную систему сфер, общая поверхность которых меньше ε. Из этого определения следует, что *проекция множества нулевой площади на любую плоскость в пространстве имеет плоскую меру нуль.*

Имеет место следующая теорема (ср. [20]).

Теорема III. *В каждой точке произвольного множества $\mathfrak{R}$ трехмерного пространства, исключая*

---

[1]) Это определение пригодно для подмножеств $\mathfrak{R}$ любого эвклидова пространства $\mathfrak{R}^n$, $n \geqslant 2$.

подмножество нулевой площади, контингенция $\mathfrak{R}$ является плоскостью, полупространством или полным пространством.

Пусть теперь в области $\mathfrak{D}$ задана непрерывная функция $f(x, y)$. Как известно, $f(x, y)$ называется дифференцируемой — или имеющей полный дифференциал — в некоторой точке $(x, y) \in \mathfrak{D}$, если полное приращение ее вблизи этой точки представимо в виде

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)=A\Delta x+B\Delta y+\\ +o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

где A и B — числа, не зависящие от Δx, Δy. При этом A и B оказываются частными производными функции $f(x, y)$ в данной точке: $A=\frac{\partial f}{\partial x}$, $B=\frac{\partial f}{\partial y}$.

Из теоремы III следует известная теорема В. В. Степанова [47] о существовании полного дифференциала.

Теорема IV. *Пусть в области $\mathfrak{D}$ плоскости xOy задана непрерывная функция $f(x, y)$. Чтобы функция $f(x, y)$ имела полный дифференциал почти всюду на некотором множестве $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{D}$, необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на $\mathfrak{E}$ было выполнено соотношение*

$$\overline{\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0}} \left| \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \right| < \infty. \qquad (1)$$

В самом деле, обозначим через $\mathfrak{R}$ поверхность $z=f(x, y)$ над областью $\mathfrak{D}$, а через $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}$ — множество точек этой поверхности, соответствующих точкам множества $\mathfrak{E}_0 \subset \mathfrak{E}$, в которых выполнено условие (1).

Из (1) следует, что в каждой точке $a \in \mathfrak{R}_0$ контингенция множества $\mathfrak{R}$ не содержит некоторого вертикального (если ось Oz направить вверх) кругового двуполостного конуса с вершиной в этой точке, а потому не является ни полным пространством, ни полупространством. В силу теоремы III почти всюду на $\mathfrak{E}_0$ — а потому и почти всюду на $\mathfrak{E}$ — поверхность $\mathfrak{R}$ имеет касательную плоскость; при этом, опять-таки в силу (1), нигде на $\mathfrak{E}_0$ эта касательная плоскость не может быть параллельной оси z.

Но отсюда и следует достаточность условия (1), так как существование невертикальной касательной плоскости к поверхности $z=f(x, y)$ равносильно существованию полного дифференциала функции $f(x, y)$.

Необходимость же условия (1) очевидна.

Аналогично доказывается, что *если непрерывная функция* $f(x, y)$ *определена только на измеримом множестве* $\mathfrak{E}$, *вообще говоря, не являющемся областью, и соотношение* (1) *имеет место почти всюду на* $\mathfrak{E}$ — *при этом точка* $(x+\Delta x, y+\Delta y) \in \mathfrak{E}$, — *то почти всюду на* $\mathfrak{E}$ *определен полный дифференциал функции* $f(x, y)$, *взятый относительно множества* $\mathfrak{E}$, *т. е. почти в каждой точке* $(x, y) \in \mathfrak{E}$ *будем иметь*

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)=$$
$$=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right) \qquad (2)$$
$$(x+\Delta x, y+\Delta y) \in \mathfrak{E},$$

где числа A, B *зависят лишь от точки* (x, y).

По аналогии с предыдущим будем по-прежнему обозначать

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad B=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Эти обозначения оправдываются еще и тем, что A, B почти всюду на $\mathfrak{E}$ действительно совпадают с так называемыми асимптотическими частными производными функции $f(x, y)$ (ср. [20]).

Приведем одно полезное видоизменение обычной записи (2) для случая функций комплексного переменного.

Пусть $z=x+iy$ и $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в области $\mathfrak{D}$ комплексной плоскости z. Функцию $f(z)$ назовем дифференцируемой в точке $z \in \mathfrak{D}$, если в этой точке дифференцируемы обе функции: $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Для такой точки получим

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(\Delta z),$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\Delta z=\Delta x+i\Delta y,$$

причем $o(\Delta z)$ понимаем как $o(|\Delta z|)$.

Вводя обозначение $\Delta\bar{z}=\overline{\Delta z}=\Delta x-i\,\Delta y$ и замечая, что

$$\Delta x=\frac{\Delta z+\Delta\bar{z}}{2}, \qquad \Delta y=\frac{\Delta z-\Delta\bar{z}}{2i},$$

предыдущее равенство получим в виде

$$\Delta f=f_z\,\Delta z+f_{\bar{z}}\,\Delta\bar{z}+o\,(\Delta z),$$

где

$$\begin{aligned} f_z&=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\ f_{\bar{z}}&=\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Для того чтобы функция $f(z)$ была моногенной в точке $z\in\mathfrak{D}$, т. е. чтобы существовал предел

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

что равносильно равенству

$$f_{\bar{z}}=0.$$

Аналогично моногенность сопряженной функции $\overline{f(z)}=u-iv$ равносильна равенству

$$f_z=0.$$

Отметим еще, что якобиан J отображения $w=f(z)$ можно представить в виде

$$J=|f_z|^2-|f_{\bar{z}}|^2.$$

§ 4. О функциях с N-свойством

Докажем следующую теорему.

Теорема V. *Пусть непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *дифференцируема всюду, за исключением, возможно, точек некоторого замкнутого множества* $\mathfrak{p} \subset [a, b]$, *и пусть производная* $f'(x)$ *суммируема вне* $\mathfrak{p}$, *т. е.*

$$\sum_n \int_{\delta_n} |f'(x)|\, dx < \infty, \tag{3}$$

где δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — *все смежные интервалы к* $\mathfrak{p}$.

Если для любых точек $x_1, x_2 \in \mathfrak{p}$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant L\, |x_2 - x_1| \tag{4}$$

(L — *постоянная*), *то* $f(x)$ *абсолютно непрерывна на отрезке* $[a, b]$.

Сделаем сначала одно замечание.

Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $y = F(x)$ абсолютно непрерывна и $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Образ отрезка $[\alpha, \beta]$ на оси Oy есть отрезок $[m, M]$, где m, M — соответственно нижняя и верхняя грани $F(x)$ на $[\alpha, \beta]$; если α', β' — точки этого отрезка, где эти грани достигаются, то

$$M - m = \left| \int_{\alpha'}^{\beta'} F'(x)\, dx \right| \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} |F'(x)|\, dx.$$

Пусть теперь непрерывная функция $F(x)$ абсолютно непрерывна в каждом интервале $\delta_n = (\alpha_n, \beta_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, смежном к некоторому замкнутому множеству $\mathfrak{p} \subset [a, b]$, причем $F(x) = 0$ для $x \in \mathfrak{p}$ и

$$\sum_n \int_{\delta_n} |F'(x)|\, dx < \infty. \tag{5}$$

Введем функцию

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \mathfrak{p}, \\ |F'(x)| & \text{при } x \in [a, b] \setminus \mathfrak{p}; \end{cases}$$

в силу (5) функция $g(x)$ суммируема и

$$G(x)=\int_a^x g(x)\,dx$$

есть неубывающая абсолютно непрерывная функция на $[a, b]$.

Проводя дословно предыдущее рассуждение, получим, что колебание ω функции $F(x)$ на каком-либо отрезке $[\alpha, \beta]\subset[a, b]$ удовлетворяет неравенству

$$\omega\leqslant\int_\alpha^\beta g(x)\,dx=G(\beta)-G(\alpha).$$

Из абсолютной непрерывности монотонной функции $G(x)$ отсюда следует, что и $F(x)$ абсолютно непрерывна.

Теперь доказательство теоремы легко завершается.

Прежде всего, ясно, что в ее условиях функция $f(x)$ является абсолютно непрерывной на каждом смежном интервале δ_n $(n=1, 2, \ldots)$ множества $\mathfrak{p}$, включая и его концы. Рассмотрим непрерывную на $[a, b]$ функцию $\varphi(x)$, совпадающую с $f(x)$ на множестве $\mathfrak{p}$ и линейную на интервале δ_n; если a' и b' — соответственно самая левая и самая правая точки $\mathfrak{p}$, то примем $\varphi(x)$ постоянной на отрезках $[a, a']$ и $[b', b]$. В силу условия (4) для функции $\varphi(x)$ имеем

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|\leqslant L\,|x_2-x_1|$$

уже для любых точек $x_1, x_2\in[a, b]$ и, следовательно, функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна.

Положим

$$F(x)=f(x)-\varphi(x);$$

очевидно, $F(x)$ абсолютно непрерывна в каждом интервале δ_n, смежном к $\mathfrak{p}$, причем

$$\sum_n\int_{\delta_n}|F'(x)|\,dx\leqslant\sum_n\int_{\delta_n}|f'(x)|\,dx+L\sum_n \operatorname{mes}\delta_n<\infty.$$

Так как $F(x)=0$ при $x\in\mathfrak{p}$, то, по предыдущему, $F(x)$ является абсолютно непрерывной функцией, очевидно, вместе с данной функцией $f(x)$.

Теорема V доказана.

Для доказательства теоремы Меньшова (см. главу 2) мы приведем необходимые понятия и утверждения, относящиеся к N-свойству непрерывных функций, отсылая за их доказательствами к монографиям Н. Н. Лузина [52] и С. Сакса [20].

Функция, $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$, обладает на нем N-свойством, если она всякое множество меры нуль переводит в множество меры нуль. Введя это определение, Н. Н. Лузин показал, что отрицание N-свойства приводит к существованию на $[a, b]$ такого совершенного множества π меры нуль, любая порция которого переводится в множество положительной меры. Отсюда, например, следует, что в определении N-свойства можно вместо произвольных множеств меры нуль говорить лишь о совершенных множествах меры нуль.

Имеет место такая теорема.

Теорема VI. *Для того чтобы непрерывная функция* $f(x)$ *была абсолютно непрерывной на* $[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f(x)$ *обладала N-свойством и чтобы*

$$\int_{e} f'(x)\,dx < \infty,$$

где $e \subset [a, b]$ — *множество точек, в которых функция* $f(x)$ *имеет конечную неотрицательную производную.*

В частности, утверждение теоремы имеет место, если $f(x)$ обладает N-свойством, а производная $f'(x)$ суммируема на том множестве, где она существует[1].

Прежде чем переходить к N-свойству однолистных функций в области, введем два определения.

1. Плоское совершенное множество $\mathfrak{P}$ называется *всюду разрывным*, если любую его точку в сколь угодно малой ее окрестности можно окружить замкнутой жордановой кривой, не проходящей через точки $\mathfrak{P}$.

Любое совершенное всюду разрывное плоское множество всегда можно заключить в конечную систему замкнутых спрямляемых жордановых кривых сколь угодно малого

---

[1] Отсюда, между прочим, снова следует теорема V.

диаметра

$$\{\gamma_k\} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

которые лежат попарно одна вне другой и не имеют общих точек с $\mathfrak{P}$. Рассматривая всевозможные такие системы $\{\gamma_k\}$ и обозначая через $l(\gamma_k)$ длину γ_k, приходим к определению:

2. Пусть $\mathfrak{P}$ — совершенное всюду разрывное множество и $\{\gamma_k\}$ какая-либо система замкнутых жордановых кривых, лежащих одна вне другой и заключающих внутри $\mathfrak{P}$. Тогда число

$$l(\mathfrak{P})=\inf \sum_k l(\gamma_k),$$

где нижняя грань берется по всевозможным системам кривых $\{\gamma_k\}$, максимальный диаметр которых стремится к нулю, называется *длиной* множества $\mathfrak{P}$.

Следуя Д. Е. Меньшову, введем определение

3. Функция $f(z)$, непрерывная и однолистная в области $\mathfrak{D}$, *обладает N-свойством* на прямолинейном отрезке δ, лежащем внутри $\mathfrak{D}$, если она всякое совершенное множество $\mathfrak{p}\subset\delta$ линейной меры нуль преобразует в множество нулевой длины.

Если $f(z)=u+iv$ обладает N-свойством на сегменте $\delta\subset\mathfrak{D}$, то функции $u(z)$, $v(z)$ на δ обладают N-свойством в смысле Н. Н. Лузина, так как разрывное множество длины нуль проектируется на любую прямую в множество меры нуль. Обратное, вообще говоря, не верно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Goursat E., Sur la definition générale des fonctions analytiques d'apres Cauchy, Trans. Amer. Math. Soc. **1** (1900), pp. 14—16.

[2] Goursat E., Demonstration du theoreme de Cauchy, Acta Math. **4** (1884), pp. 197—200.

[3] Pringsheim A., Über Goursats Beweis des Cauchyschen Integralsatzes, Trans. Amer. Math. Soc. **2** (1901), pp. 413—421.

[4] Pringsheim A., Der Cauchy—Goursatsche Integralsatz und seine Übertragung zur reelle Kurvenintegrale, Münch. Ber. **33** (1903), pp. 673—682.

[5] Pringsheim A., Über den Cauchyschen Integralsatz, Münch. Ber. **25** (1895), pp. 39—72.

[6] Moore E. H., A simple proof of the fundamental Cauchy—Goursat theorem, Trans. Amer. Math. Soc. **1** (1900), pp. 499—506.

[7] Heffter L., Zur Theorie der reellen Kurvenintegrale, Gött. Nachr., 1902, pp. 115—140.

[8] Heffter L., Zum Beweis des Cauchy—Goursatschen Integralsatzes, Gött. Nachr., 1903, pp. 312—316.

[9] Heffter L., Über die von einem Integrationsweg von vornherein unabhängige Definition des bestimmten Integrales im zweidimensionales Gebiet, Gött. Nachr., 1904, pp. 196—200.

[10] Schottky F., Über den geometrischen Begriff der Funktion einer komplexen Veränderlichen, Berlin. Ber., 1915, pp. 790—798.

[11] Heffter L., Über den Cauchyschen Integralsatz, Math. Ztschr. **34** (1931), pp. 473—480.

[12] Pompeiu T., Sur la continuité des fonctions de variable complexe, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (2) **7** (1905), pp. 264—315.

[13] Looman H., Ueber eine Erweiterung des Cauchy—Goursatschen Integralsatzes, Nieuw. Arche. Wiksde (2) **14** (1925), pp. 234—239.

[14] Montel P., Sur les suites infinies des fonctions, Ann. Ecole Norm. (3). **24** (1907), pp. 233—234.

[15] Montel P., Sur les différentielles totales et les fonctions monogènes, C. R. Acad. Sci. Paris, 156 (1913), pp. 1820—1822.

[16] Lichtenstein L., Sur la definition générale des fonctions analytiques, C. R. Acad. Sci. Paris, 150 (1910), pp. 1109—1110.

[17] Ch. de la Vallée-Poussin, Reduction des intégrales doubles de Lebesgue. Application á la definition des fonctions analy-

tiques, Acta r. de Belgique, Bull. de la classe de sci., 1910, № 11, pp. 793—798.

[18] Looman H., Ueber die Cauchy—Riemannschen Differentialgleichungen, Nachr. Ges. Wiess. Göttingen, 1923, pp. 97—108.

[19] Menchoff D., Les conditions de monogénéité, Paris, 1936.

[20] Сакс С., Теория интеграла, М., 1949.

[21] Толстов Г. П., О криволинейном и повторном интеграле, Труды Матем. ин-та В. А. Стеклова, XXXV (1950).

[22] Bohr H., Ueber streckentreue und konforme Abbildung, Math. Ztschr. **1** (1918).

[23] Rademacher H., Über streckentreue und winkeltreue Abbildung, Math. Ztschr. **4** (1919), pp. 131—138.

[24] Menchoff D., Sur la représentation conforme des domaines plans, Math. Ann. **95** (1926), pp. 640—670.

[25] Remak R., Über winkeltreue und streckentreue Abbildung an einem Punkt und in der Ebene, Rend. di Palermo **38** (1914), pp. 193—246.

[26] Menchoff D., Sur les conditions suffisantes pour qu'une fonction univalente soit holomorphe, Матем. сб., т. 40, № 1 (1933), pp. 3—23.

[27] Menchoff D., Sur une généralisation d'un théorème de M. H. Bohr, Матем. сб. **2** (44) (1937), pp. 339—356.

[28] Штейнберг Н. С., Об условиях, достаточных для моногенности функции комплексного переменного, Матем. сб. **17** (59) (1945), 45—58.

[29] Menchoff D., Sur la généralisation des conditions de Cauchy—Riemann, Fund. Math. **25** (1935), pp. 59—97.

[30] Меньшов Д. Е., Об асимптотической моногенности, Матем. сб. **1** (1936), 189—210.

[31] Kuramochi Z., On sufficient conditions for a function to be holomorphic in a domain, Osaka Math. Journ. **3**, № 1 (1951), pp. 21—47.

[32] Besicovitch A. S., On sufficient conditions for a function to be analytic, and on behaviour of analytic functions in the neighborhood of non-isolated singular points, Proc. London Math. Soc. (2) **32** (1931), pp. 1—9.

[33] Федоров В. С., О теореме Морера, Матем. сб. **40**, № 2 (1933), 168—179.

[34] Федоров В. С., Об одном свойстве криволинейных интегралов, Матем. сб. **24** (66), № 1 (1949), 15—26.

[35] Müller C., Über die Umkehrung des Cauchyschen Integralsatz, Arch. Math. **6**, № 1 (1954), pp. 47—51.

[36] Федоров В. С., Труды Н. Н. Лузина по теории функций комплексного переменного, УМН, VII, 2 (48) (1952), 7—16.

[37] Stoïlow S., Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Paris, 1938.

[38] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, М., ИЛ, 1950.

[39] Мышкис А. Д., Еще о задаче Н. Н. Лузина, УМН, XII, 2 (74), 155—157.

[40] Мышкис А. Д. и Гиль Г. В., Об одной задаче Н. Н. Лузина, УМН, X, 1 (63) (1955), 143—145.
[41] Lusin N., Sur un problème de M. Baire, C. R. Acad. Sci. Paris **158** (1914).
[42] Menchoff D., Sur les fonctions monogénes, Bull. Soc. math. de France **59** (1931).
[43] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М., ИЛ., 1950.
[44] Wolibner W., Sur les ensembles des valeurs des fonctions analytiques, partout determinées, aux singularités punctiformes, qu'elles admettent sur leurs ensembles singuliers, C. R. Soc. Sci. de Varsovie **25** (1933), pp. 56—62.
[45] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М., ИЛ, 1948.
[46] Caratheodory C., Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Ann. **73** (1912), pp. 323—370.
[47] Stepanoff W., Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale, Матем. сб. 32 (1925), pp. 511—526.
[48] Трохимчук Ю. Ю., Теорема Г. Бора и ее обобщения, Матем. сб. **45** (87), № 2 (1958), 233—260.
[49] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. II, М., ИЛ, 1951.
[50] Трохимчук Ю. Ю., К обобщению теоремы Пикара, Укр. матем. журнал, т. X, № 1 (1958), 70—77.
[51] Ahlfors L., Beurling A., Conformal invariants and functional-theoretic null-sets, Acta Math. **83** (1950), pp. 101—129.
[52] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М., ИЛ, 1951.
[53] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959.
[54] Долженко Е. П., О дифференцировании комплексных функций, ДАН **130**, № 1, 17—20.
[55] Menchoff D., Sur les diffèrentielles totales des fonctions univalentes, Math. Ann. **105** (1931), pp. 75—85.
[56] Математика в СССР за тридцать лет, М.—Л., 1948, стр. 403.
[57] Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, М., 1960, стр. 418.
[58] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., 1947.
[59] Роднянский А. М., О непрерывно дифференцируемых отображениях открытых множеств, Матем. сб. **36** (78), № 2 (1955), 233—262.
[60] Роднянский А. М., О непрерывных и дифференцируемых отображениях открытых множеств эвклидова пространства, Матем. сб. **42** (84), № 2 (1957), 179—196.